幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ８ (２００１年１２月６日) の分

問．「M が向きづけられている」の定義の式「各点 $x \in M$ に対し，T_xM の向きが次の条件をみたすように決められている：$\forall x \in M, x \in \exists U \subseteq_{\text{open}} M, \exists h :: U \to \exists V \subseteq_{\text{open}} H^m$ 向きを保つ微分同相写像，つまり，$\forall x \in M, (h_*)_x : T_xM \to T_{h(x)}H^m = \mathbf{R}^m$ が向きを保つ」がよくわかりません．向きを決める条件の中に，向きを保つ，という言葉が入っているのはおかしくありませんか？

答．こんにちは．１２月２０日は休講です．来年のことを言うと鬼が笑うかもしれませんが，幾何学５の講義は１月１７日から再開します．つまり，１月１０日も休講ということです．さて回答ですが，なるほど．鋭い指摘ですね．でも，同じ「向き」という用語を使っていますが,「向きを保つ」というのは，ここでは線形代数のレベルの概念であり，それを使って「多様体の向き」という概念を定義した，という論理の流れなので良いわけです．わかりづらいようなので，順番を変えてもう一度説明し直してみましょう．(１) ベクトル空間の向き (２) 向きを保つ線形同型写像 (３) 局所座標系で誘導される局所座標近傍の向き (４) 多様体の向き (５）向きを保つ微分同相写像．まず (1) ですが，ベクトル空間の基底の取り方はいろいろあるわけですが，その基底たちに「同じ向きを定める」という同値関係を，講義で説明したように定義し，その同値類を「ベクトル空間の向き」と呼びます．同値類は丁度２つしかありません．そのどちらも平等な立場です．ただし，$\mathbf{R}^m$ の場合には標準基底というものがあるので，標準基底の定める方の向きを**標準的な向き**と呼びます．次に (2) ですが，向きの指定されたベクトル空間 V から，向きの指定されたベクトル空間 W への線形同型写像 $f : V \to W$ があったとします．($\dim V = \dim W$ で，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$)．線形写像は，$V$ と W の基底を決めれば行列で表現される，ということは１年生のときに習っているはずです．(つまり，$u_1, u_2, \ldots, u_m$ を V の基底，$w_1, w_2, \ldots, w_m$ を W の基底としたとき，$(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)A$ で定まる行列 A が f の表現行列です)．さて，V と W の基底を，**与えられた向きを定めるように選んで**，h を表現した行列の行列式が正のとき，h は**向きを保つ**と言います．行列式が正という条件は，同じ向きを決める基底であれば，基底の取り方によりません．(証明は簡単です)．次に (3) ですが，まず，$\mathbf{R}^m$ の領域 (開集合) の各点の接空間は $\mathbf{R}^m$ と同一視できるので，そこには，標準的な向きが入ります．そして m 次元多様体上に局所座標系 $h : U \to V \subset \mathbf{R}^m$($V$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合) があれば，各点 $x \in U$ に対して線形同型写像 $(h_*)_x : T_xM \to T_{h(x)}V = \mathbf{R}^m$ があります．これが向きを保つか否かは，T_xM の向きの指定の仕方で変わるのですが，ともかく，$(h_*)_x$ が向きを保つような T_xM の向きはただ１つあります．(２つに１つです)．ただし，$\mathbf{R}^m$ の向きは，標準的な向きを選びます．このように，局所座標近傍 U 上の (接空間の) 向きは標準的に決まられます．次に (4) ですが，多様体 M の向きとは，すべての接空間 $T_xM(x \in M)$ の向きのことですが，ただし条件として，局所的には，ある局所座標系から標準的に定まるような向きのことです．つまり，点ごとに接空間の向きをバラバラに指定するのではなく，隣近所で声を掛けあって接空間の向きを指定する，ということです．(このことを,「連続的に向きを指定する」と言いこともあります)．もちろん多様体によっては，そのようにすべての接空間 $T_xM(x \in M)$ の向きを指定できないこともあります．指定可能のとき，その多様体を**向きづけ可能**，どうがんばっても指定不可能のとき，その多様体を**向きづけ不可能**と呼びます．$\mathbf{R}^m$ や球面 S^m は向きづけ可能な多様体の例であり，クラインのつぼや２次元射影空間 $\mathbf{R}P^2$ は向きづけ不可能な多様体の例です．最後に (5) ですが，向きづけられた多様体 M から，向きづけられた多様体 N への微分同相写像 $h : M \to N$ が**向きを保つ**とは，指定された向きに関して，線形写像 $(h_*)_x : T_xM \to T_{h(x)}N$ が向きを保つときに言います．以上です．

問．多様体の向きを明確にする必要があるのはなぜですか？多様体の向きや，写像度などを考えるのは，その多様体の性質や特徴を知る，ということが目的の一つなのですか？序論で習ったベクトル積分の際は，曲面の向きを積分するために設定した記憶がありますが，何か別の目的があって向きを考える必要があるのですか？向きづけは，この先どのようなことに使われていくのですか？以前学んだように積分に使ったりするのですか？向きづけられた多様体は，ふつうの多様体に比べ，どういったことが新たに扱いやすくなるのですか？線積分や Green の定理のように，向きづけすることで新たに考えられることがあるのでしょうか？向きづけを与えることによる利点はどのようなところにありますか？向きを考える意味は何ですか？

答．Brouwer の写像度 ($\in \mathbf{Z}$) を定義するためです．向きを考えるのは，質問にもあるように，積分をする場合にも必要だし，ホモロジー論でも重要になります．

問．向きを保つ微分同相写像とは,「表現行列の行列式が正になる」ということでよろしいのでしょうか？

答．よろしいです．

問．向きを保つの意味はどういった意味なのでしょうか？

答．上で説明したように，線形同型写像 $f : V \to W$ の場合をしっかり理解しておけば良いわけですが，f が向きを保つというのは，V の向きから f によって，誘導される W の向きが，あらかじめ W に指定されている向きと一致するということです．たとえば，線形同型写像 $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ の場合は，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表したとき，m 次正則行列 A の行列式 $\det(A) > 0$ ということです．

問．V : m 次元ベクトル空間，基底 $u_1, u_2, \ldots, u_m$，もう１組 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ が同じ向きを定める $\Leftrightarrow (v_1, v_2, \ldots, v_m) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)A$ と表したとき $\det A > 0$，というのは以前やりましたが，$\det A > 0$ とするのはどうしてですか？

答．たとえば $V = \mathbf{R}^2$ の場合を考えてみましょう．$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は標準基底，$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ は標準基底を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させたもの，$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は，標準基底を x 軸に関する鏡映で変換したものです．この３つの基底のどれとどれが同じ向きを定めると考えるのが自然でしょうか？(u_1, u_2) と

(v_1, v_2) は同じ向きで，(w_1, w_2) は，それらとは違う向きであるというのがまあ自然でしょうね．このとき，$(v_1, v_2) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ であり，行列式は $\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 1 > 0$ です．一方，$(w_1, w_2) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり，行列式は $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$ です．

問． $\det A = 0$，$\det A < 0$ のときというのはどうなるのですか？

答． $\det A < 0$ のときは違う向きを定めます．A は正則行列になるので，$\det A = 0$ にはなりません．

問．「向きがたもたれていない」と「負の向き」は同じことなのですか？

答． 違うことです.「向きがたもたれていない」というのは，写像の性質であり,「負の向き」というのは，一方の向きを正の向きと定めたときの逆の向き，ということです．

問．「向きづけられた多様体」の概念を導入すると，多様体の分類としては大きく分けられたことになるのですか？

答． 多様体を「向きづけ可能」と「向きづけ不可能」の２つの種類に分け，向きづけ可能なものには２通りの向きが入り，そのどちらかを指定したものを「向きづけられた多様体」というわけです．(ここでは正確には，多様体の連結成分について考えています).

問． 向きづけられていない多様体にはどのようなものがありますか？

答． たとえば，２次元射影空間 $\mathbf{R}P^2$ は，向きづけることが不可能な多様体です．

問． どのようにしても向きづけができない場合，たとえばクラインのつぼ，などはどうやって定義するのですか？

答． 向きづけ不可能なことをどうやって証明するか，という質問だと思いますが，それはなかなか難しい (だからおもしろい?) ことです．

問． 微分同相でなくても向きを保てばよいということはありませんか？

答． 微分できないと微分写像が考えられなくて，向きを保つとか，保たないとかが考えられません．

問． 向きづけの定義のところで，$\exists h : U \to \exists V \subseteq_{\text{open}} H^m$ とありますが，H^m は $\mathbf{R}^m$ ではだめなのですか？

答． 境界がある場合も含めて書いているので H^m を使っています．向きづけの点だけなら，$\mathbf{R}^m$ と思っても大差はありません．

問． 向きづけの正負と，$\deg_2$ とは何か関係があるのですか？

答． 関係ないです．

問． 境界なしコンパクト多様体でのホモトピー不変量について，境界なし，ということがどのようにきいているのですか？

答． 境界がある場合は，正則値の逆像の個数の偶奇は正則値の選び方に依ってしまいます．そして，$\deg_2$ はホモトピー不変量ではありません．たとえば，区間 $[0, 1]$ から $\mathbf{R}$ への写像 (関数) を例にして考えるとすぐにわかります．

問． $u_1, \dots, u_m \in T_x(\partial M)$ が正の向きを定める定義がよくわかりません．いきなり M 上の外向きベクトルが登場してくるのが納得いきません．

答． 境界の向きの指定の仕方を決めているだけです．約束ごとです．平面領域とその境界の向きの付け方の慣習に準じてそれを一般化しているだけです．

問． 何を基準にして，“外・内” の向きを定めるのですか？

答． 良い質問ですね．境界点における局所座標系を通して，上半空間 H^m (の開集合) の場合を考えればよいのですが，その場合，外向きベクトルとは，第 m 成分が負であるものを指しています．上半分が多様体に属していて，下半分が属していないわけですが，属していない方を向いているベクトルのことです．

問． “M の向きから ∂M の向きが決まる”ということだったのですが，逆に “∂M の向きから M の向きが決まる” ことはあるのですか？

答． 良い指摘です．決まりますね．つねに決まります．

問． 球の境界における向きづけはどうやって決ったのか教えてください．

答． $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ を $D^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ の境界とみなします．また，$\mathbf{R}^3$ には標準的な向きを入れておきます．さて，S^2 の向きを決めるには，まず外向きのベクトルを考えるわけですが，簡単のため，各点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ で，外向き単位法線ベクトルを取りましょう．それを u_1 とおきます．今の場合，$u_1 = x$ というわけです．さて，x における接空間 T_xS^2 は，x において x に直交する平面です．その基底 u_2, u_3 の取り方を指定すればよいわけですが，u_1, u_2, u_3 が標準的な向きと一致するように指定するわけです．わかりましたか？

問． ∂M の向きづけで，$u_1 \in T_xM$ としましたが，$u_1 \in T_x(\partial M)$ ではないのですか？

答． $u_1 \in T_xM$ です．境界には接していないベクトルです．でも M には接しているベクトルです．

問．「N に境界点があるならば $f : M \to N$ について，$\deg_2(f) \equiv 0 (\mathrm{mod}.2)$」の証明で,「$\forall y \in N$ s.t. f の正則値で $y \in \partial N$ とすると，f が微分同相であるが，これは矛盾する」とありますが，その矛盾の内容はどのようなものなのでしょうか？

答．「f の正則値で，$\partial N \cap f(M)$ に属する点があるとすると矛盾」ということですが，もし $\exists y \in N; y \in \partial N \cap f(M)$ かつ y は f の正則値，と仮定すると，$y \in f(M)$ だから，$\exists x \in M; f(x) = y$ ですが，y は f の正則値なので，正則値の定義から x は f の正則点です．すると逆写像定理から，f は x の近傍から y の近傍への微分同相写像なのですが，このことが，y は N の境界点であることに矛盾します．

問．定値写像 $c: M \to M$, $f(M) = \{z\}$ について，$y \notin f(M)$ なら $\#f^{-1}(y) = 0$ というのはわかりますが，$f^{-1}(z) = M$ なのに，なぜそれを無視して $\#f^{-1}(y) = 0$ から $\deg_2(f) \equiv 0 \mathrm{mod}.2$ とするのですか？

答．z は正則値ではないからです．実際，定値写像については，どの点 $x \in M$ に対しても，c の x における微分写像は $(c_*)_x = 0$ であり，全射になりません．

問．定値写像とは何ですか？

答．定義域のすべての点を，値域のある決まった１点に写すような写像のことです．

問．$z \notin f(M)$ のとき z を正則値と定義したのは，正則値のもともとの定義から直接導かれるのではなく，いわば人為的に導入されたものなのですか？

答．人為的ではなく，定義から論理的に導かれます．(アリストテレスの昔から確立している形式論理が人為的かどうかはさておき)．さて，「z が f の正則値 $\Leftrightarrow (\forall x \in M; f(x) = z \Rightarrow x$ は f の正則点)」が定義でしたが，$z \notin f(M)$ の場合，任意の $x \in M$ に対して，前提の $f(x) = z$ が偽なので，「$f(x) = z \Rightarrow x$ は f の正則点」は真ですね．したがって，z は定義から正則値です．

問．「$\nexists f : D^{n+1} \to S^n, f|_{S^n} = \mathrm{id}_{S^n}$」の意味がわかりません．

答．「可微分写像 $f : D^{n+1} \to S^n$ で，D^{n+1} の境界の S^n に f を制限したものが S^n の恒等写像になるようなものは存在しない」という意味です．

問．「金魚すくいができる，できない」とは何のことですか？

答．$n = 1$ として，もし，可微分写像 $f : D^2 \to S^1$ で $f|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$ となるものがあったとしますね．(本当は無いわけですが)．S^1 を金魚すくいの枠に，D^2 をその枠にはってある紙にそれぞれ見立てているわけです．枠の部分を変えずに，紙が枠に巻き付いてしまったら，金魚すくいはできません．

問．M が m 次元のとき，∂M は $m-1$ 次元とのことですが，直線の境界は 0 次元，つまり，点なのでしょうか？

答．直線というより，線分の境界ですね．たとえば，ゼロイチ区間 $[0,1]$ は境界つき１次元多様体ですが，その境界 $\partial[0,1]$ は何でしょう？そうです，$\partial[0,1] = \{0,1\}$ (0 と 1 の２点からなる集合) です．

問．写像度の考え方は方程式にも応用できますか？

答．どういう方程式を指しているのかわからないので，質問の主旨とは異なるかもしれませんが，たとえば，代数方程式 (代数学の基本定理) に適用できます．また写像度の考え方を無限次元空間に適用すると，ある種の微分方程式の解の存在が証明されます．

問．iso と homo の違いを教えてください．

答．iso は「同じ」，homo は「似ている」，といったニュアンスがあります．

問．背理法とはどんな時に使うのですか？

答．証明するときに使います．素直に証明しようとして挫折したときに頼りになります．たとえば，なにかの存在を証明したい場合は，例を１つ構成すれば良いのですが，不存在の証明の場合は，存在すると仮定して矛盾を導く，つまり背理法を使うのが普通です．

問．昨日の新聞で，世界の何十カ国で行われた数学の応用テストで，数学の偏差値は一番よかったようです．テストの内容までは載っていませんでした．一方，最近出ている本では，大学生の学力が格段に落ちていることがデータによって示されているようです．この２つの結果は一見すると矛盾しているように思えるのですが，先生はどう感じますか？

答．一回のテストの結果で判断を下すことはできません．ところで，いわゆる「学力」が落ちている，ということは社会が複雑になれば，受けとる情報がそれだけ多くなり，若い人もじっくり勉強している暇がなくなるわけだから当然のなりゆきですね．問題なのは，蓄積された人類の叡智のどの部分を次世代に受け継いでいくべきか，ということなのでしょう．大学レベルの数学に限ると，「論理的な筋道に沿って考える能力」は，皆さんに最低限身につけてほしいことだと私 (石川) は考えています．他のことはまあよいとしても，イメージしたことを確かなものに形作ることができる，ということ大事です，現代社会は，その能力を，数学 (数学科を卒業した学生) に対して一番期待していると思います．生半可な知識は必要ない．知識は，必要になったときに勉強すればよい．まず身につけるべきは，**勉強しようと思ったときに勉強できる論理的な能力**だと思います．今は，そのためのトレーニング (頭の体操) をしているわけですね．私 (石川) も皆さんに期待しています．

問．この講義は何を理解するのが目的なのですか？最近講義に全くついていっていません．何を証明しているのか，どうしてそうなるのか，証明して理解することが何の役に立つのかわからないことが多いです．特にこの部分がわからないというより全体像が見えてきません．

答．たぶん，皆さんは完璧主義で，すべてがわからないとわかった気がしない，といった感じなのだと推測します．でも，大学の数学をすべて理解しようというのは無理があります．全体像を性急に見ようとするより，まず，何か分かりそうなことをひとつ見つけて，それにこだわって，その一点だけでも理解する，ということで良いと思います．ホームランをねらうよりヒットをねらう．まず，何か小さなことでも深く納得して自信を持つことから始めたら良いと思います．そうすると芋づる式にわかってくるものです．参考にしてみてください．では皆さん良いお年を．