

幾何学 5 (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
 No. 7 (2001年11月22日) の分 (No. 6 は欠番)

問. 写像度の偶奇は何によるのでしょうか?

答. 写像のホモトピー類によります. 写像のホモトピックという同値関係に関する「不変量」です.

問. なぜ, 写像度を考えるときに 2 を法とするのですか? 奇数, 偶数に分けることで何か利点があるのでしょうか? どういった意味があるのでしょうか?

答. 偶数が奇数か, ということが写像自体の重要な情報を持っているからです. たとえば, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ から S^1 への写像として, 恒等写像 $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1, \text{id}_{S^1}(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t)$ と, 定値写像 $c : S^1 \rightarrow S^1, c(\cos t, \sin t) = (1, 0)$ がホモトピックではないことがわかります. というのは, \deg_2 はホモトピー不変量であり, もしホモトピックだとすると同じ値 ($\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) になるはずなのですが, $\deg_2(\text{id}_{S^1}) = 1, \deg_2(c) = 0$ であって, 違う値になっているからです.

問. 定理「 $f : M \rightarrow N, M$ コンパクトで $\partial M = \emptyset, N$ 連結, $y, z \in N$ f の正則値 $\Rightarrow \#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}$ 」の具体例としては何があるのでしょうか?

答. たとえば, $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ から $\mathbb{R}^2 = \{(y_1, y_2)\}$ への写像 $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ に対して, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ で定義しましょう. (これは以前調べた立体射影とは違う写像です. x_3 軸に沿った正射影ですね.) $M = S^2, N = \mathbb{R}^2$ としています. この写像の臨界値の集合は $C_f = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\} (= S^1)$ です. したがって, 正則値の集合は $\mathbb{R}^2 - S^1$ です. $\mathbb{R}^2 - S^1$ は, 開円板 (単位円の内部) と穴の開いた平面 (単位円の外部) の連結成分に分れます. y を内部から, z を外部からとると, $\#f^{-1}(y) = 2$ で $\#f^{-1}(z) = 0$ ですね. ですから, $\#f^{-1}(y) \neq \#f^{-1}(z)$ ですが, 2 を法とすれば, $\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}$ となるわけです. ちなみに, この例では, 臨界値の逆像の個数は 1 であり, 正則値の逆像の個数とは, 2 を法としても, 違ってくことに注意しましょう.

問. 10月の初めごろに説明された写像度の定義では, 向き付けを考慮して符号をこめて逆像の個数を考えたのですが, 今回は, 逆像の個数を考える際に符号は考えられていません. これは, $\pmod{2}$ の値を考えることによって, 符号も考えられていると捉えた方がよいのでしょうか?

答. 符号は考えられない, と捉えてください. 向きづけられた多様体の間の写像には, 整数値の写像度 $\deg(f)$ を定めることができるのですが, 一般の場合は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の要素としてしか定めることができない, $\deg_2(f)$ は定まるけれど $\deg(f)$ は定まらない, ということです. そして, 向きづけられた多様体の間の写像の場合, 写像度 $\deg(f)$ を $\pmod{2}$ reduction ($\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) したものが, 今回定義した $\deg_2(f)$ です.

問. 「 $\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}$ 」と定理にあります, これは正則値 y と z の差別化を表しているのですか?

答. 差別化でなく, 一種の「不変性」を表しています. 平等化です.

問. 「 $\#f^{-1}(y) \pmod{2}$ は正則値 y のとり方によらない」について, 講義の例で, y が折り返しの点とした場合に $\#f^{-1}(y)$ が偶数になってしまいませんか?

答. その通りです. 折り返し点が臨界値だからです.

問. 幾何学 2 で定義したホモトピーと今回の授業でやったホモトピーの定義はほとんど同じものだと考えてよいのでしょうか?

答. ほとんど同じものですが, 少し違います. つまり, この講義では「可微分」という条件がついているので, 少し違います. 少し違いますが, 「2つの可微分写像が (連続的) ホモトピックならば, 可微分的ホモトピックである」という定理が成り立ちます. このことは, 連続写像は可微分写像で近似できる, ということから証明できます.

問. 可微分ホモトピックについての $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$ の証明で, 可微分ホモトピーを $H(x, t) = F(x, \varphi(2t)), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, G(x, \varphi(2t-1)), \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ とするのはなぜですか? 可微分でないときは, $H(x, t) = F(x, 2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, G(x, 2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ としました. (F, G はそれぞれ f から g, g から h へのホモトピー).

答. H が可微分であるようにするためです. すごく単純な例になりますが, $M = \{p\}$ を 1 点として, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(p) = 0$ で, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(p) = 1$ で, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(p) = 3$ で定め, f と g を結ぶホモトピー $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = t$ と, g と h を結ぶホモトピー $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, G(t) = 2t+1$ を考えましょう. (ここで, $M \times [0, 1] = \{p\} \times [0, 1]$ を $[0, 1]$ と同一視しています). このとき, 単純に $H(x, t) = F(x, 2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, G(x, 2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ とおいてみると, この例の場合, $H(t) = F(2t) = 2t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, H(t) = G(2t-1) = 2(2t-1) + 1 = 4t-1, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ となります. この関数 $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフを書いてみてください. H は, $t = \frac{1}{2}$ で可微分でないですね. だから, 可微分になるように, 関数 φ を使って, 滑らかにつなげたわけです.

問. ほとんどの写像がホモトピックになるように思いました. ホモトピックにならないものはどんなものですか?

答. 最初の質問と関係しますが, たとえば, 恒等写像 $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1, \text{id}_{S^1}(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t)$ と, 定値写像 $c : S^1 \rightarrow S^1, c(\cos t, \sin t) = (1, 0)$ はホモトピックではありません.

問. ホモトピーの定義で, $[0, 1]$ 区間を考えていますが, 他の区間ではダメなのですか?

答. ダメではありません. 他の有界閉区間 $[a, b]$ を使ってもよいです.

問. 可微分関数 φ は, とりあえず 0 から 1 を単調増加で滑らかにつなげればよいのですよね?

答. 0 の近くでは 0 で, 1 の近くでは 1 であるようにします. そうすると滑らかにつなぎやすいからです. 急に動き出したり, 急に止まったりしたら, 事故のもとです.

問．可微分イソトピーの例を教えてください．

答．たとえば， $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ を $H(\cos \theta, \sin \theta, t) = (\cos(\theta + \pi t), \sin(\theta + \pi t))$ で定めましょう． $t \in [0, 1]$ を固定して考えると， πt 回転であり，微分同相写像です． $t = 0$ のときは恒等写像であり， $t = 1$ のときは， π 回転です．

問．補題「 N 連結な可微分多様体， $y, z \in N - \partial N$ (境界点でない2点)， \exists 微分同相写像 $h: N \rightarrow N$, id_N に可微分イソトピックかつ $h(y) = z$ 」で，なぜ y, z は境界点でない2点なのですか？境界上の点から取ってくるとどのような不備があるのでしょうか？

答． y, z の一方が境界点であり，もう一方が境界点でないときは， $h(y) = z$ となる微分同相写像 $h: N \rightarrow N$ は存在しないからです．なぜなら，もしそのような微分同相写像が存在するとすると，境界点のある開近傍と，境界点のある開近傍が微分同相になることになりませんが，それは不可能だからです．

問．可微分イソトピー $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ について， $F(\cdot, t): M \rightarrow N$ が微分同相写像だったので， $G: N \times [0, 1] \rightarrow M$ があって，可微分イソトピーであることが言えると思うのですがどうですか？また，もしそうなら $G = F^{-1}$ は言えますか？

答．言えますね．

問．補題「 $f, g: M^n \rightarrow N^n$ $M: \text{compact}$, $\partial M = \emptyset$, $N: \text{connected}$, $y \in N$ が f の正則値かつ g の正則値， $f \simeq g \Rightarrow \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$ 」がよくわかりません． $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$ が偶数となるのがよくわかりません．

答． $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$ が境界つきコンパクト1次元多様体 $F^{-1}(y)$ の境界点の個数になるからです．

問． $\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$ とありますが，これはどういうことなのか言葉で説明してほしいです．

答．2 を法として， $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \equiv 0$ なので， $\#f^{-1}(y) \equiv -\#g^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$ となるわけです．

問．「 $F^{-1}(y)$ は compact 1 次元多様体 (正則値の逆像だから)」というのは当たり前なのですか？どこを復習するとよいのか教えてください．

答．境界付き多様体のところで説明した定理 (Brouwer の定理の説明の直前) を使っています．境界つきの場合の，「正則値の逆像は多様体」の定理です．ちなみに，コンパクトなのは，コンパクト集合の閉集合だからです．

問．今日の補題の証明で「 y が F の正則値でない場合」というのはどういう扱いになるのでしょうか？

答．はっきり書かなかったですが，その場合も証明しました．証明の後半部分です．

問．補題の証明で， $y \in N$ が f の正則値かつ g の正則値であって， F の正則値でない，という状況がうまくイメージできないのですが，よい例はないのでしょうか？

答． t が 0 の十分近くや 1 の十分近くならよいのですが， f から g に写像を変形していく途中で，写像 F がどんな写像かわからないので， y が F の正則値でないこともあるわけです．たとえば，球面から平面への正射影 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ を， x_1 方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動してから，しばらくじっとして，またもとに戻る，というホモトピーを考えましょう．このとき， $y = (\frac{1}{2}, 0)$ は f の正則値ですが， F の正則値ではありません．

問．「可微分同相写像」と「微分同相写像」は同じですか？

答．同じです．「可微分同相写像」の方がよいかもしれませんが，「微分同相写像」という訳がだいたい定着しているので，それを使っています．

問． $F(\cdot, t)$ の \cdot は何ですか？

答．失礼しました． $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ なので， \cdot に M の点 x を代入すると， N の点 $F(x, t)$ が決まる，という意味で， $F(\cdot, t): M \rightarrow N$ と書いてしまいました．(一種の略記法です)．

問．位相空間の多様体では，ハウスドルフを仮定していると思いますが，これからの講義で分離された多様体を考えることがありますか？

答．つねにそうです．この講義で扱っている多様体は，すべてハウスドルフであり，局所座標近傍をはり合わせたものになります．

問．イソトピーはアイソトピーという発音だと思っていました．

答．アイソトピーでも大丈夫です．

問．小テストの問題で， $((g \circ f)_*)_x = (g_*)_x \circ (f_*)_x$ が成り立つとありますが，なぜ成り立つのですか？

答．合成写像の微分法則 (連鎖律, chain rule) です．証明してみてください．

問．小テストの解答の「 $g = f^{-1}: N \rightarrow M$ とすると， $g \circ f = \text{id}_M, f \circ g = \text{id}_N$ 」は明白なのですか？

答．明白です．(復習ポイント: 逆写像)．

問．質問がでてこなかったのですが... 定義や定理の証明をあらためてよく見たのですが，なんとなくわかっているつもりになっています．質問しようと思ってノートをながめていたら理解が深まって行って結局なくなってしまいました．こういうときの質問はどうすればよいのでしょうか？

答．具体的に，どの部分の理解が深まったのか書いてくれないので，状況がよくわかりません．その部分が「どうわからなかったか，その後，それは，こういうことではないか，と自分で理解できた」というその内容を具体的に書いてくれば OK です．

問．実はこの授業に出るのは今回が初めてなのですが，今からでもかんばれば単位はもらえるのでしょうか？

答．たぶん無理だと思います．少し冷たい言い方かもしれませんが，いまごろから講義を聞き始めても，いくら優秀な人でも，内容を理解することは不可能だと思います．時間の無駄です．もっと有意義な時間の過ごし方をお勧めします．ではまた．