幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ５ (２００１年１１月８日) の分

問． 不動点は，何か役に立つのですか？不動点定理などと，たいそうな名前がついていますが，そんなに重要なのでしょうか？

答． こんにちは．今日は小テスト (４０分) を行います．また，質問書の提出は，今日はありません．さて，回答ですが，重要です．写像の不動点は，その写像で，自分自身に写されるような点のことであり，非常に特徴的な点です．たとえば $m = 1$ のとき，D^m は閉区間 $[-1, 1]$ ですが，連続写像 $f : D^1 \to D^1$ に対して不動点が存在する，ということは,「中間値の定理」と等価です．(つまり，お互いに一方から他方が導かれる)．でも，中間値の定理は，そのままでは高次元化できないのですが，不動点というキーワードを使うと，この講義で説明しているように，任意の次元 m について，不動点定理という形で一般化できる，というわけです．不思議ですね．

問． ブラウアーの不動点定理とは，序論７で教えてもらったのと同じでしょうか？「不動点があったら，それはただ１つであることを示せ」という問題が出された記憶があります．

答． 違う定理です．以前習ったのは，質問から推測すると「縮小写像定理」のことだと思います．写像 $f : D^m \to D^m$ が**縮小写像**，つまり，ある正の数 $\mu < 1$ があって，任意の $x, x' \in D^m$ について，$d(f(x), f(x')) \leq \mu d(x, x')$ が成り立つ，ならば，f は**ただ１つの不動点をもつ**，という，これまた有名な定理ですね．(d は距離を表します．縮小写像定理は，D^m の代わりに一般の距離空間においても成立)．この講義で説明している Brouwer の不動点定理では，縮小写像である，という仮定はついていませんね．したがって，仮定が違います．また，結論も，不動点がある，ということで，ただ１つ，ということは主張していないので，結論も違います．つまり，**仮定も違うし，結論も違う定理である**と言えます．なお，連続写像 $f : D^m \to D^m$ の不動点がただ１つであるとは限りません．たとえば，f として恒等写像 id_{D^m} を考えると，id_{D^m} はもちろん連続写像 (可微分写像です) ですが，すべての点 $x \in D^m$ は id_{D^m} の不動点ですね．

問．「可微分的 Brouwer の不動点定理」というように書いていますが，可微分写像でないときにも Brouwer の不動点定理というものがあるのでしょうか？

答． そうです．連続写像という仮定だけで成立します．講義で説明する予定です．

問． 今回出てきた境界点は「内点，外点，境界点」と序論で習ったものと同じですか？

答． 違います．局所座標をとって考えたときには正確に対応しますが，そのままの意味では違います．では，どのように違うか，具体例で説明しましょう．いま，$X = \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ とおきます．(X を図示してください)．X は境界つき１次元可微分多様体です．でも，X は $\mathbf{R}^2$ の部分集合なので，集合と位相の講義で習ったように，$\mathbf{R}^2$ のすべての点は，X の内点，X の外点，X の境界点の３種類にもれなく重複なく分けることができますね．その定義をよく思い出してみると，いまの場合，X の内点は存在せず，X のすべての点は，X の境界点であり，それ以外の点が，X の外点になります．一方，多様体としての X の境界点は $(0, 0)$ の１点だけです．**$\mathbf{R}^k$ の部分集合としての境界点か，多様体としての境界点かを区別しなければいけません**．注意が必要ですね．ただし，$H^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ について考えると，$\mathbf{R}^2$ における H^2 の境界点と，H^2 を境界つき２次元可微分多様体としたときの境界点は一致します．

問． 講義で,「境界つき多様体」を定義しましたが，逆に考えると，そもそも境界がついていない多様体など存在するのですか？世の中に存在するものには，全て境界 (表面) が存在すると思います．集合・位相の本にある境界とは，全く違っているのですか？

答． 全く違っているわけです．でも，定義を知っていれば惑うことはないと思います．上の質問とも関係するわけですが，もう１つ例を挙げましょう．$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ とおきます．(X を図示してください)．X は境界のない１次元可微分多様体です．($\mathbf{R}^2$ と微分同相)．でも，集合・位相での意味の $\mathbf{R}^2$ における X の境界点は，$\{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2\}$ に属する点ですね．注意が必要です．(このように同じ言葉でも違う意味に使うのは，目的な違うので仕方ないのです)．

問． 定理「X : 境界つき m 次元可微分多様体，N : 境界なし n 次元可微分多様体，$m > n$, $f : X \to N$ 可微分，$y_0 \in N$ が f の正則値，$f|_{\partial X}$ の正則値 $\Rightarrow f^{-1}(y_0)$ は境界つき $(m-n)$ 次元可微分多様体であり，$\partial(f^{-1}(y_0)) = f^{-1}(y_0) \cap \partial X$」の説明をお願いします．

答． 導きたい結論は，すべて局所的 (local) な性質なので，局所座標系を使うことによって，はじめから可微分写像 $f : H^m \to \mathbf{R}^n, y_0 \in \mathbf{R}^n$ が f の正則値であり，しかも $f|_{\partial H^m}$ の正則値であるとして証明すればよいですね．$x_0 \in f^{-1}(y_0)$ とします．もし，x_0 が境界点でなければ，以前証明したように，点 x_0 の近傍で，$f^{-1}(y_0)$ は $(m-n)$ 次元可微分多様体です．そこで，x_0 が境界点であるとしましょう．f は可微分写像なので，定義により，x_0 の $\mathbf{R}^m$ における開近傍 U 上の可微分写像 $g : U \to \mathbf{R}^n$ に拡張できます．x_0 は g の正則点ですが，$G : U \to \mathbf{R}^{n+1}, G(x) = (g(x), x_m)$ の正則点でもあります．というのは，$(g_*)_{x_0}$ の核の次元は $m-n$ 次元で，それは，$T_{x_0}(\partial H^m)$ には含まれない，含まれるとすると，x_0 が $g|_{\partial H^m}$ の正則点ではなくなるから．次元の計算で全射ではあり得なくなるから．さて，任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して，ある $u \in T_{x_0}U$ があって，$(g_*)_{x_0}u = v$ ですが ($(g_*)_{x_0}$ の全射性)，任意の $v' \in \mathbf{R}$ について，$v' - ((x_m)_*)_{x_0}(u)$ という (１次元) ベクトルを考えると，ある $u' \in \mathrm{Ker}(g_*)_{x_0}$ があって，$((x_m)_*)_{x_0}(u') = v' - ((x_m)_*)_{x_0}(u)$ となります．ここで，x_m は，U 上の x_m 座標関数です．すると，$(G_*)_{x_0}(u + u') = ((g_*)_{x_0}(u + u'), ((x_m)_*)_{x_0}(u + u')) = ((g_*)_{x_0}(u), ((x_m)_*)_{x_0}(u) + ((x_m)_*)_{x_0}(u')) = (u', v')$ となります．このようにして，$(G_*)_{x_0}$ が全射であることがわかります．あとは，境界のない場合の証明と同様ですが，まず，$K = \mathrm{Ker}(G_*)_{x_0} : T_{x_0}U \to T_{(g(x_0), x_{0,m})}\mathbf{R}^{n+1}$ を考えると，$m-n-1$ 次元部分ベクトル空間であり，線形写像 $\ell : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{m-n-1}$ を $\ell|_K : K \to \mathbf{R}^{m-n-1}$ が同型写像であるように選びます．そして，$H : U \to \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{m-n-1} = \mathbf{R}^m$ を $H(x) = (G(x), \ell(x))$ で定義すると，逆写像定理により，局所微分同相写像であり，$f^{-1}(y_0)$ は，丁度 $\{(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m \mid (y_1, \ldots, y_n) = y_0, y_{n+1} > 0\} \cong H^{m-n}$ (の開集合) に写ります．

問． 境界つき１次元コンパクト可微分多様体は，S^1 と有界閉区間の有限和になる話で，境界点の個数が偶数になるのはなぜですか？

答． S^1 には境界点がなく，有界閉区間には，境界点が２個あるからです．

問． S^0 とは何ですか？１点ですか？

答． ２点です．というのは，定義から，$S^0 = \{x_1 \in \mathbf{R} \mid x_1^2 = 1\}$ なので，$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbf{R}$ だからです．

問． 境界つき１次元コンパクト可微分多様体は，S^1 と有界閉区間の有限和と微分同相，ということは,「S^1 かつ有界閉区間」の有限和と微分同相，という意味でよいのでしょうか？

答． 「S^1 または有界閉区間」の有限和です．つまり，円周をいくつかと，有界閉区間をいくつか，(重ねないで) 置いたものです．いくつか，というのは 0 個でもかまいません．1 や 10 や 0 や 00 や 11 や 101 や 001 を図形と思ったものはその例です．(ただし，1 は，飾りを無視して単に「一本棒」として考える).

問． 「境界点の個数が偶数 $\Rightarrow$ １次元コンパクト可微分多様体」ということですか？

答． 違います.「境界つき１次元コンパクト可微分多様体 $\Rightarrow$ 境界点の個数が偶数」です．

問． 可微分多様体とコンパクト可微分多様体の違いがよくわかりません．

答． 可微分多様体であり，位相空間としてコンパクトなものを，コンパクト可微分多様体と表現しています．

問． 「部分集合 $X \subset \mathbf{R}^k$ が境界つき m 次元可微分多様体」の定義について，$D^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq 1\}$ の例で教えてください．定義「$\forall x \in D^m, x \in \exists U \subseteq \mathbf{R}^k$ (開集合), $\exists V \subseteq \mathbf{R}^m$(開集合)，$D_m \cap U$ と $H^m \cap V$ と微分同相」の,「$D^m \cap U$ と $H^m \cap V$ と微分同相」の部分が証明できません．

答． 完璧な証明はここでは書きませんが，簡単のため，$m = 2$ とし，$x = (0, 1)$ の場合に，U と V をどう選び，どう微分同相写像を構成するかを説明してみますね．$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ と取り，$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ と取りましょう．$D^2 \cap U$ と $H^2 \cap V$ をそれぞれ図示してみてください．このとき，写像 $\varphi : D^2 \cap U \to H^2 \cap V$ を，$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2} - x_2)$ で定義しましょう．これはどんな写像かというと，"上半円板" $D^2 \cap U$ を x_1 軸に関して反転して，それを x_2 方向に，$\sqrt{1 - x_1^2}$ だけずらして，別の上半円板 $H^2 \cap V$ にするというものです．どうでしょうか．(餃子の湾曲している"ひだひだ"の側をまっすぐにする)．この φ は微分同相写像です．というのは，逆写像は $\psi : H^2 \cap V \to D^2 \cap U, \psi(y_1, y_2) = (y_1, \sqrt{1 - y_1^2} - y_2)$ であり，φ も ψ も可微分写像だからです．わかりましたか？

問． ∂X が $(m-1)$ 次元可微分多様体であるのはなぜですか？

答． 定義からわかります．定義の，$X \cap U$ と $H^m \cap V$ が微分同相，という部分で，境界点は $(\partial H^m) \cap V$ に写るので，微分同相写像 $\Phi : \partial H^m = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) \in \mathbf{R}^m\} \to \mathbf{R}^{m-1}$, $\Phi((x_1, \dots, x_{m-1}, 0)) = ((x_1, \dots, x_{m-1})$ を考慮すると，∂X の局所座標 $\partial X \cap U \to \mathbf{R}^{m-1} \cap V'$ (V' は $\mathbf{R}^{m-1}$ の適切な開集合) が構成できるからです．

問． 境界つき m 次元多様体 $X \subseteq \mathbf{R}^k$ の定義で，k と m の大小関係は決まっているのですか？

答． 良い質問ですね．決まっています．$m \leq k$ です．というのは，X の接空間 $T_x X$ は m 次元ベクトル空間であり，$T_x \mathbf{R}^k \cong \mathbf{R}^k$ の部分空間なので，**線形代数の定理から** $m = \dim T_x X \leq \dim \mathbf{R}^k = k$ です．

問． $\mathbf{R}^k$ の部分集合 X が境界付き m 次元部分多様体であるかどうかは容易にわかりますか？

答． 容易にはわかりませんが，調べやすい十分条件があります．たとえば，もし，可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_{n-1}, f_n) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ があり，$y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}, y_{0,n}) \in \mathbf{R}^n$ が f の正則値であり，

$$X = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k \mid f_1((x_1, \dots, x_k)) = y_{0,1}, \dots, f_{n-1}((x_1, \dots, x_k)) = y_{0,n-1}, f_n((x_1, \dots, x_k)) \geq y_{0,n}\}$$

(第 n 成分に注意)，と表されるならば，X は境界つき $k - n + 1$ 次元可微分多様体になります．

問． D^m が境界付き m 次元部分多様体であることは，わかったのですが，もっと複雑な例を教えてください．

答． たとえば，球面から，互いに離れている十分小さな開円盤をいくつか除いたものは境界つき２次元可微分多様体です．たとえば，ボーリングのボールの一番外側の表面．

問． 境界について特別に議論しているのは，いままでは境界について考えていなかったということですか？または，境界がある場合を考えているのですか？

答． 境界のある場合も考えた，ということです．

問． 一般に多様体というものには，境界は付かないのですか？

答． 以前定義した多様体は境界のない多様体でした．今回定義した境界つき多様体は，正確に述べると,「境界があるかもしれない多様体」です．したがって，多様体と名付ける対象を増やした，一般化した，ということです．

問． 境界つき m 次元可微分多様体は，境界なし多様体とどうちがうのですか？

答． 境界があるかもしれない，という違いです．可能性が増えたということです．

問． 定義から察するに，境界点のない多様体も境界つき多様体となっているのでしょうか？

答． その通りです．定義にあてはめるとわかるように，$X \subset \mathbf{R}^k$ が m 次元可微分多様体ならば X は境界つき m 次元可微分多様体です．境界点のない多様体 X は，境界つき多様体 X であって，$\partial X = \emptyset$ であるもののことです．このように，数学の世界では，ある名前を定義したら，その定義の条件をみたすものは，どんなものであれ，たとえ予想外のものであっても，その名前で呼んでよいわけです．そして，定義の条件をみたさないものについては，その名前で呼んではいけないのです．単純な世界です．

問． 境界つき多様体でない多様体の例を教えてください．

答． 上で説明したように，多様体は境界 (空集合) つき多様体です．定義にあてはまれば何でも OK なのです．

問． 「境界つき」であることのメリットは何ですか？

答． この講義では，Brouwer の不動点定理の証明に応用しました．それに限らず，境界のついた対象は多いので，扱えた方が良いですね．たとえば，弥生時代の人たちの作った土器 (弥生式土器) は，境界つき２次元多様体になっていますね．(ただし，厚味は無視する)．それに比べて，縄文時代の人は，土器に境界があるのをいやがったそうです．そ

こで，土器の縁に，いろいろな飾りをつけたそうです．(火焔状土器)．たとえると，境界つき多様体を考えるということは，縄文時代から弥生時代に移行したようなものですかね．

問． 有界閉区間の有限和と S^1 が微分同相ということがわかりません．

答． 有界閉区間の有限和と S^1 は微分同相ではありません．(境界点の個数が違うので)．

問． $f : X \to \partial X$ の正則値 $y_0 \in \partial X$ がどうしてとれるのですか？どのようにして Sard の定理を用いるのですか？

答． 正則値の集合は dense なので，空集合ではないからです．

問． 「正則値の逆像」と「正則点の集合」は異なるのですか？正則点の像は正則値に行くと思うのですが．

答． 正則値の像が正則値に行くとは限りません．たとえば，関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^3 - 3x$ について考えましょう．(グラフを描いてみてください)．微分 $f'(x) = 3x^2 - 3$ なので，$f'(2) \neq 0$ だから，$x = 2$ は f の正則点です．でも，$f(2) = 2$ は正則値ではありません．というのは，$f(-1) = 2$ でもあり，$x = -1$ の方は $f'(-1) = 0$ なので，f の正則点ではないからです．

問． $\partial(f^{-1}(y_0)) = f^{-1}(y_0) \cap \partial X$ は常に１点なのですか？

答． 違います．$\partial(f^{-1}(y_0))$ が一点であるという主張は，不動点定理の証明の途中で，背理法を使った部分で出てきたことであり，あくまで仮定の話，架空の世界のこと，いわば「背理法モード」での主張であって，実際に成り立つことではありません．

問． 境界つき１次元可微分多様体は，ヒモのようなものですか？もしそうなら，ヒモの「はじ」で微分できるのでしょうか？

答． ヒモのようなものです．でもヒモのはじで微分するということではなくて，あくまで，境界つき可微分多様体であるというだけの意味です．このような集合の上の関数が可微分であるというのは，最初の時間に説明したように，それを含む開集合上の可微分関数に拡張できる，そういう意味で微分が考えられる，という意味でした．たとえば，上半空間の境界点では，関数を，境界点を超えて，可微分関数に拡張して考えるわけです．

問． なぜ「$(f_*)_x$ が全射でない $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0, (i = 1, \dots, m)$」なのですか？

答． 微分写像 $(f_*)_x : T_x\mathbf{R}^m \to T_y\mathbf{R}$ は **線形写像**である，ということを思い出しましょう．線形写像が全射であるかどうかを判定する方法を知りませんか？線形写像の像の次元と階数の関係は習いませんでしたか？そう，あれですよ．この場合，m 次元空間から 1 次元空間への線形写像なので，全射でない $\Leftrightarrow$ 階数が 1 より小さい $\Leftrightarrow$ 階数が 0，ですね．階数が 0 ということは，零行列で表された線形写像ですね．つまり，$1 \times m$ 型行列 $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}) = (0, \dots, 0)$ ということが条件になるわけです．

問． 可微分多様体の中で群構造をもつものがあると思い質問します．

答． あります.「リー群」と呼ばれるものがそれです．

問． $\mathbf{R}^m$ に１か所条件を付けただけの上半空間を考えたことで，広がりが生まれたような気がします．何か条件を加えることで，その存在価値がはね上がるようなものには，どのようなもの (空間) がありますか？

答． 条件というか,「構造」を付け加えると，いろいろ話が広がるということはよくあることです．たとえば，$\mathbf{R}^2$ を複素数平面 $\mathbf{C}$ と思い,「複素構造」を入れて考えると，リーマン面の話ができますね．

問． 最近，数学は (1) 論理と (2) 数学的対象 (数，図形など) の合わさったものと感じたりするのですが，先生はどう思いますか？僕は最近まで数学と論理学をほぼ同じようなものだと感じていました．しかしここ数日，数学の面白さは後者の方で．僕が悪戦苦闘しているのは (1) の方だと感じるのですが．

答． なるほど．客観的に自分を分析できるのはすばらしいですね．指摘も鋭いし．でも，論理で悪戦苦闘しているというのは当たっていないような気もします．というのは，数学の論理は，単に,「$\forall, \exists, \Rightarrow$」と「and, or, not」 の単純な組み合わせだけなので，たとえば，２６文字のアルファベットを組み合わせて英語を読んだり，５１音や漢字を組み合わせて日本語を書くことなどと比べると，ずっと単純な作業だと思うからです．たぶん (3) 数覚 (数学的対象に対する感覚，これは小平邦彦先生の造語) と呼ばれているものが関係しているのかも知れません．

問． 自分の頭の回転の遅さに泣けてきます．

答． そんなことはないと思います．謙遜だと思いますが，仮に，万一，頭の回転が遅いとしたら，それはすばらしいことです．というのは，回転が遅いのは，質量が大きく，慣性の法則から，それを回すのに大きな力が掛るからであり，いったん回り出したらすごいのかも知れないからです．それはともかく，頭の回転が良いということは，それだけでは，実際はあまり価値がないように思います.「頭の回転の良さ」より,「頭の回線の良さ」(アクセススピードより，アクセス容量，アクセス可能性，質，柔軟さなど) の方が大切なのではないでしょうか？

問． 図を使って説明する質問は扱ってもらえないのですか？

答． できれば答えたいのですが，図を描くには少し時間とスペースが余計に使わなければならないという理由から回答しづらくなります．ごめんね．なるべく，質問は文章でも説明してもらえると助かります．ところで，僕は密かに経済学とかをやっているのですが，こうなったらいいなという仮定が強すぎるのに，現状の経済を論じようとするから，なんかうさんくさいです．ただ，経済動向を予測するには大いに役立っているのでしょうが，という話題をもらいました．非常に複雑な現象を扱う経済学に数学が使われるというのも，何か不思議な感じがしますね．それから,「平和は宗教の道具」で,「宗教は戦争の道具」でしょうか,「戦争は科学の道具」かもしれません，という意見をもらいました．私 (石川) は，歴史的に平和でないから宗教が生まれたと考えています．それから戦争が科学の動機づけになった (なっている) というのは，残念ながら事実でしょうね．ではまた．