幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 3 (２００１年１０月２５日) の分

問．「S^2 から有限集合を除いても連結」ということがわかりません．

答．こんにちは．季節はずれですが，皆さんはスイカを切るときに，何を使いますか？アイス・ピックですか？錐 (きり) ですか？針ですか？包丁ですか？たぶん，包丁だと思います．(ナイフでも可)．(今の時期なら，柿を切る，とした方が季節感が出ますか)．さて回答ですが，球面から，１点を取り去っても，２つに分かれないですね．つまり連結です．２点除いても連結です．３点除いても連結です．有限集合を取り去っても連結です．ところで，連結の定義は，すでに御存じだと思いますが，確認のため書いておくと,「位相空間が**連結** $\Leftrightarrow$ それぞれ空ではない２つ開集合の，共通部分のない和集合としては表されない」です．平面で考えると，もっとわかりやすいかも知れませんね．平面から１０億個の点を取り去っても，連結なままです．

問．「命題：M がコンパクトで，$\dim M = \dim N$ のとき，可微分写像 $f : M \to N$ について，(1) 正則値の集合は N の開集合，(2) $\# f^{-1}(y)$ は正則値の集合上で局所一定」の証明中の V の取り方のイメージがわきません．また,「$\forall y' \in V$ は f の正則点」というのもわかりません．

答．もう一度，証明をしてみましょう．$y \in N$ を f の正則値とし，$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ とおくと，各 x_i は，仮定から f の正則点なので，逆写像定理により，f は x_i の近くで局所微分同相，つまり，x_i の開近傍 U_i と y の開近傍 V_i があって，f は U_i から V_i の上への微分同相になります．各 V_i は N の開集合ですが，番号 i によって変わってくるので，その共通部分をまずとります．その上に f によって移る点のうち，$U_1 \cup \cdots \cup U_k$ に属する点は，正則点ばかりです．でも，$U_1 \cup \cdots \cup U_k$ に入らない点で，$V_1 \cap \cdots \cap V_k$ に移ってくる点がないとも限りません．$\{x_1, \dots, x_k\}$ は，あくまで y の逆像であり，y の近くの点の逆像が，すべて $\{x_1, \dots, x_k\}$ の近くにあるとは保証されていないからです．そこで，M の閉集合 $M - (U_1 \cup \cdots \cup U_k) = M - U_1 - \cdots - U_k$ を考え，その f での像 $f(M - U_1 - \cdots - U_k)$ を考えます．$M - U_1 - \cdots - U_k$ は，**コンパクト空間の閉集合なので，コンパクトです**．そして，**コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト**なので，$f(M - U_1 - \cdots - U_k)$ は N のコンパクト集合であり，N の閉集合です．また，仮定より，y も含みません．したがって，$V_1 \cap \cdots \cap V_k - f(M - U_1 - \cdots - U_k)$ は y の開近傍であり，それを V とおけば,「$\forall y' \in V$ は f の正則点」という結論がなりたつわけです．よかったね．

問．$\# f^{-1}(y') = k = \# f^{-1}(y)$ (V 上で一定) がわからないので，もう一度説明をお願いします．

答．上の質問の回答のつづきですが，V の取り方から，$f^{-1}(y') = \{x'_1, \dots, x'_k\}, x'_i \in U_i$ となるので，$f^{-1}(y')$ の個数は，$f^{-1}(y)$ の個数と同じ k です．

問．局所一定とはどういうことですか？「局所一定」とは,「各点の近傍において一定」という意味ですか？

答．その通りです．たとえば，$U = \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ とおき，U 上の関数 $[x]$ (ガウス記号) は，局所一定 (locally constant) な関数です．(グラフを書いてみましょう)．ちなみに,「局所」とは，考えている点のある近傍に限れば，という意味です．たとえば，北海道に限れば，赤飯に甘納豆を入れたりするわけですが，これはローカルな (局所的な) 風習ですね．

問．正則点の定義について,「正則点 $\Leftrightarrow$ 〜のような写像」という形になっていますが，これは,「〜のような写像をもつ点」と考えるのでしょうか？

答．その通りです．正則点の定義「x が f の正則点 $\Leftrightarrow (f_*)_x : T_x M \to T_y N$ が全射」を，より丁寧に述べると,「x が f の正則点であると言うのはどんな場合か，それは，x での f 微分写像とよばれる線形写像 $(f_*)_x$ があるが，そして，その線形写像の定義域は $T_x M$ であり，値域は $T_y N$ であるが，その線形写像 $(f_*)_x$ が全射 (surjection) の場合，その場合に限り，x が f の正則点であると言う．だから，x が f の正則点であると言ったら，必ず，$(f_*)_x$ は全射であるという意味であり，$(f_*)_x$ は全射でなかったら，x が f の正則点であると言ってはいけない」ということです．

問．幾何的に，正則点，臨界点は，一体何を表すのですか？正則点の定義を眺めると「$(f_*)_x : T_x M \to T_y N$ が全射」とあります．接空間が全射とは，どういうことでしょうか？

答．「全射」というのは写像の性質なので，$(f_*)_x$ にかかります．$(f_*)_x$ が全射ということです．$T_y N$ が全射，という意味ではありません．たとえば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$ について考えると，$(f_*)_x : \mathbf{R}(= T_x \mathbf{R}) \to \mathbf{R}(= T_y \mathbf{R})$ は $(f_*)_x(u) = 3x^2 u$ で定義される線形写像です．(**微分とは線形化と見つけたり**)．この線形写像が全射なのは，$3x^2 \neq 0$ のときですね．つまり，$x \neq 0$ のとき，x は $f(x) = x^3$ という写像の正則点です．また，$x = 0$ は f の臨界点です．このように，正則点，臨界点，などの概念は，微分学に起原をもつ，由緒正しいものです．

問．「$(f_*)_x : T_x M \to T_y N$ が全射」を，原始的に「$\forall y' \in T_y N, \exists x' \in T_x M s.t. (f_*)_x(x') = y'$」と表現すると都合がわるいのですか？

答．都合がわるいどころか，全く正しいです．まさに，これが「全射」の定義ですね．ただし，接ベクトルを x' や y' と表すのは，少しまぎらわしい (M や N の点であるかのような誤解を受けやすい，誤解を受けやすいのはよろしくない) ので,「$\forall v \in T_y N, \exists u \in T_x M s.t. (f_*)_x(u) = v$」とした方が better だと思います．

問．今日の講義に出てきた「正則」は１年のときの線形代数に出てきたものと同じですか？

答．その通り，同じ意味あいのものです．ただし，正則行列という場合は，正方行列に限っていました．この講義でいうと，$\dim M = \dim N$ の場合が，それに該当して,「x が可微分写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ の正則点 $\Leftrightarrow$ ヤコビ行列 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$ が正則行列」ということになります．一般の場合 ($\dim M = \dim N$ とは限らない場合) は，この講義での正則の意味は，連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ が，任意の $\mathbf{b}$ に対して解をもつような，行列 A の性質に該当するもの (非線形版) です．

問．$(f_*)_x$ というのは，接平面 $T_x M$ の一点 x からの写像ではないのですか？

答．違います．あくまで，x での接平面 $T_x M$ (つまり，接ベクトル空間) からの写像です．写像の記号 $f : X \to Y$ は，必ず，任意の $x \in X$ に対し，$f(x) \in Y$ が定まっている，という意味を持っていることに注意しましょう．

問．正則点でない点は臨界点で，正則値でない点は臨界値ですか？

答．その通りです．講義で定義した通りです．

問． 臨界点の定義は「正則点でない点」とするのがメジャーなのですか？正則点は，むしろわきやくで,「臨界点でないものを正則点とする」と定義する方が普通ではないかと感じました．

答． なるほど．でも，数学的には同じことですね．ところで，私 (石川) は「へそまがり」なので，メジャーなものには反発したくなります．たとえば，プロ野球のメジャーリーグも，野茂の時代は好きでしたが，イチローや新庄が活躍している今は，(日本でもメジャーに扱がわれるようになってきたので) だんだん興味がなくなってきました．

問． y が f の正則値の定義で,「$f^{-1}(y)$ の任意の点が f の正則点」とありましたが，よくわかりません．

答． $f^{-1}(y)$ は $y \in N$ の $f : M \to N$ による逆像です．つまり，$x \in M, f(x) = y$ である点 x の集まりです．ですから条件は,「$x \in M, f(x) = y \Rightarrow x$ は f の正則点」つまり「$x \in M, f(x) = y \Rightarrow (f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が全射」という条件です．これは，f を決めたときに，点 y に対する条件です．たとえば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ について，$y = 0$ が正則値かどうか調べると，$x^3 - 3x = 0$ を解いて，$x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$，つまり，$f^{-1}(0) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ であり，これらが正則点かどうか見るために，f を微分すると，$f'(x) = 3x^2 - 3$ であり，$f'(0) \neq 0, f'(\pm\sqrt{3}) \neq 0$ なので，$x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ はすべて正則点ですから，$y = 0$ は正則値です．

問． 「$f^{-1}(y) = \emptyset$ のとき，y は正則値である」というのはなぜですか？

答． 正則値の条件が，$f^{-1}(y)$ の任意の点に関するものであり，$f^{-1}(y)$ 空集合であれば，その条件は無条件でクリアされているわけなので，定義から，正則値であるという論法です.「$f^{-1}(y)$ の任意の点が f の正則点」ということを論理記号で表せば,「$\forall x; x \in f^{-1}(y) \Rightarrow x$ は f の正則点」ですが，$P \Rightarrow Q$ の形で，P が偽なので，$P \Rightarrow Q$ は真です．

問． $\mathrm{rank}(f_*)_x$ の意味がわかりません．

答． 線形写像 $(f_*)_x$ の階数です．一般に，ベクトル空間からベクトル空間への線形写像 $h : L \to K$ の階数とは，h の像の次元のことです．つまり，$\mathrm{rank}(h) = \dim(h(L))$ です．

問． $(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が全射であるための必要十分条件が，$\mathrm{rank}(f_*)_x = \dim N$ である，ということがなぜ成り立つのかわかりません．

答． $(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が全射 $\Rightarrow (f_*)_x(T_xM) = T_yN \Rightarrow \dim(f_*)_x(T_xM) = \dim T_yN \Rightarrow \mathrm{rank}(f_*)_x = \dim N$ というわけです．$\dim T_yN = \dim N$ に注意しましょう．

問． $(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が全射であるというのは，点 x における T_xM 上の点が，$(f_*)_x$ によって T_yN 上の点に写される，ような点が正則点である，という解釈でよいでしょうか？

答． よくないです．$(f_*)_x$ は x がなんであれ，T_xM の点 (点 x における M の接ベクトルと言います) を T_yN の点 (点 y における N の接ベクトル) に写します．注目するのは，それが全射かどうか，ということです．(復習ポイント：全射)．

問． $(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が単射というのは重要ではないのですか？

答． 重要です．この講義ではまだ出てきていませんが，$(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ が単射の場合は，x で f がはめ込み (immersion) である，と言います．(たとえば，パラメータ付けは，はめ込みの例です)．

問． 特異点とは何ですか？正則点でない点が特異点になるだろうと考えていましたが，臨界点という言葉が出てきたので，ちょっとびっくりしました．

答． 特異なもの (こと) は，世の中にあふれているので,「特異点」とよばれる点にも，いろいろな種類のものがあります．たとえば，複素関数論でいう特異点と，代数幾何でいう特異点は違うものです．この講義で扱っている可微分写像の特異点に話を限ると，特異点は，臨界点より少し強い (狭い) 意味で使用します．つまり，$\mathrm{rank}(f_*)_x < \min\{\dim M, \dim N\}$ となるような点 x を f の**特異点**と呼びます．

問． f の x の微分写像 $(f_*)_x$ を定義する上で導入する f の拡張 $F : W \to \mathbf{R}^\ell$ はどうして必要なのですか？

答． 導入した方が，$(f_*)_x$ の定義が (講義で説明したように) 簡単にできるからです．ただし，f の拡張を使わない定義もあります：x の近くでの M のパラメータ付け $\psi : U \to M$ と，y の近くでの N のパラメータ付け $\rho : V \to N$ を通して，$\rho^{-1} \circ f \circ \psi : U \to V$ の微分写像から定義することもできます．講義ノートを良く見ると，そのようなことが書いてあることに気づくと思います．

問． $(f_*)_x(v) := (F_*)_x(v)$ で定めた後，これが「F のとり方によらずに定まる」ことを check するのはなぜですか？幾何に限らず，代数，解析でも自分が定義したものを well-defined であることを確かめることが多いのですが，この理由がいま一つわかりません．たしかに，F のとり方によって変わるようだと問題ですが，定義はルールみたいなものだと思うので，ルールを確かめることの理由を教えてください．

答． ルールというより，シールですね．たとえば，いろいろな種類のカニの入った缶詰めに，タラバガニのシールを貼ったらば，よくないですね．タラバガニのシールを貼って売るためには，本当に，タラバガニだけが入っているかどうかを check する必要があります．札幌工場ではタラバガニだが，函館工場では，ズワイガニを入れていたら，タラバガニ缶としては売り出せません．well-defined かどうかをしらべるのは，いわば,「定義の品質管理」です．

問． 拡張とは何ですか？

答． $F : W \to \mathbf{R}^\ell$ が $f : M \to N$ の (W への) 拡張であるとは，$F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$ ということです.「可微分写像」の定義の箇所をもう一度みてください．

問． 図式 $\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & N \\ \uparrow{\scriptstyle\psi} & & {\scriptstyle\rho}\uparrow \\ U & \xrightarrow{\rho^{-1}\circ f\circ\psi} & V \end{array}$ が可換であるというのは簡単にわかるのでしょうか？

答． はい，わかります．実際，任意の $u \in U$ について，$F(\psi(u)) = f(\psi(u)$ (ここで $\psi(u) \in M$ と，F が f の拡張であることに注目) $= \rho \circ \rho^{-1} \circ f\psi(u)$ なので可換ですね．

問． 上の図式を微分して，

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^k \arrow[r, "F"] & \mathbf{R}^\ell \\ \mathbf{R}^m \arrow[u, "\psi_*"'] \arrow[r, "(\rho^{-1}\circ f\circ\psi)_*"] & \mathbf{R}^n \arrow[u, "\rho_*"] \end{tikzcd}$$

とは，何をどう微分してこうなるのですか？

答． 可微分写像を微分しています．つまり，微分写像をとっている．言い換えれば，ヤコビ行列 (で定まる線形写像) をとっているということです．

問． 可微分多様体上の C^r-関数は，その多様体に入れる微分構造によって C^r 級ではなくなってしまうので，どの微分構造をいれているかを明記する必要があると思うのですが．

答． まったくその通りです．でも，いちいち明記していると面倒なので，どのような微分構造を入れているかが明らかな場合は，説明を省略するわけです．**この幾何学５の講義では，ユークリッド空間の部分多様体のみを扱っている**ので，(その微分構造，つまりアトラスの同値類は一意的に定まるので)，明記していないという次第です．

問． 今日の授業で出てきた，臨界点や正則点などは，ユークリッド空間での微分写像の話だと思うのですが，非ユークリッド空間の場合はどうなるのですか？

答． 非ユークリッド空間というのは，ユークリッド計量ではない計量の入った空間という意味ですが，この講義内容は，計量とは無関係な話をしています．(「長さ」とか「測地線」などの話をするときは，重要な問になりますが)．

問． 正則点とは，微分可能な点という感じですか？

答． 違います．正則的や臨界点は，可微分な関数に関してのみ定義されています．簡単のために，関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に話を限ると，点 $x \in \mathbf{R}$ が f の正則点とは，微分 $\dfrac{df}{dx}$ が 0 でないような点のことです．そこでは，f は局所微分同相になっていますね．

問． 裏返すとは，向きづけを反対にすることなのですか？

答． そうですね．たとえば，３次元空間内の平面 $\mathbf{R}^2$ は，裏返すことができますね．

問． 写像度は定義によると，正則点ごとに対して決まるのですか？

答． 定義によるとその通りです．そして，これから述べる予定の「定理」によると，正則点のとりかたにはよらない，つまり，写像に対して決まる数であることがわかります．

問． 演習問題 $\dim M = \dim N$, M: compact, $f : M \to N$ の正則値 y について，$f^{-1}(y)$ が有限集合，を示すことについて次のような証明でよいでしょうか？(証明を書いてくれました)．

答． 残念ながら，まったくデタラメな解答でした．残念ですので，ぜひ，もう一度正則値や正則点の定義，逆写像定理，コンパクト性の定義などをよく思いだして，はじめから考え直してくださいね．

問． 微分トポロジーでは，不変量以外は研究対象にならないのですか？

答． そうです．どちらかというと，何か調べたい (おもしろい) 研究対象がまずあって，それが意味をもつような研究の枠組みを作って研究する，という流れだと思います．だから，研究が発展して，研究対象が拡がっていけば，学問自体も変遷していく，ということでしょう．

問． 数学一般で，たとえば，ベクトル空間のテンソル積や多様体における接ベクトル等のように，複数の仕方で定義されている概念があるとき，そのような定義の間の同値性は実際示されるのでしょうか．また，証明しておいた方が良いでしょうか？

答． 確かに基本的な概念は，(数学の重要な概念はみんなそうですが)，複数のやり方で導入されますね．でも，とにかく論理的に無矛盾な形で導入されていればよい，というのが基本的な数学の立場だと考えますが，どうでしょう．そして，研究が深まるにつれて，その概念を多角的に見られるようになってくる，ということでしょうか．

問． 多様体は，代数学の基本定理の他に，代数とどういう関係がありますか？トポロジーの理論との関係についても教えてください．

答． たとえば，代数幾何は，代数 (特に可換環) を幾何的に代数多様体 (あるいは複素多様体，たとえばリーマン面) を通して理解しようという分野です．整数論でも算術幾何という分野が盛んで，やはり多様体を研究します．表現論も，リー群や対称空間という多様体と密接に関係します．群論や C^* 代数の研究でも多様体が登場します．多様体を知らなくては，現代の代数を理解するのは不可能です．多くの分野が多様体と関係します．またトポロジーでも多様体は不可欠です．というのは，トポロジーの一番重要な研究対象 (研究の舞台) が多様体だからです．幾何や代数ばかりではなく，解析の分野でも，(古典理論ならともかく) 多様体を使います．たとえば大域解析という分野は，多様体上の解析学です．数学だけではなく，物理の相対性理論や素粒子物理学や物性物理などの分野では，多様体は常識だし，生物学でも，ヒトゲノムなどの多くの情報を以下に総合的に理解するか，という場合に，多様体の考え方は有効になると予想できます．それは，複雑系，たとえば経済の分野などの研究にもあてはまることだと思います．

問． 今，学んでいる多様体についての知識や考え方は，社会の中でどのような分野，技術に使われたりしているのですか？先日の集中講義で昔ならったガウス曲率や平均曲率というようなものが医学系でたとえば肝硬変の進行度合いを写真分析して数値化するというようなことをやっていたので，少し興味を持ちました．

答． たぶん，単純な意味では，**多様体は社会の中で絶対に役に立ちません**，と答えるのが正しいのかも知れません．でも，将来のことは誰にもわかりませんね．それはともかく，医学のことは私 (石川) は詳しくないので，一番安直な方法ですが，Internet 検索で,「多様体」を調べてみたらおもしろいかも知れませんね．

問． 質問が思いつかないときはどうしたらよいですか？(説明を聞いても，どこがわからないかすら，わからないとき)．

答． それはつらいですね．受業中 (授業を受けている間) はなるべく意識を集中して聞いて，良い (= 深い) 質問をしてもらいのたいですが，お互い，人間なので，集中できない日もあると思います．そのようなときは，とにかく，(時間的に) 最初に出てきたわからないことを質問すればよいと思います．ところで，私 (石川) は，カーキ色とは，柿色のことだと思っていました．そう言えば，ひっぱり蛸，台風一家，などの勘違いもあります．ではまた．