幾何学5 (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (２００１年１０月１８日) の分

問． m 次元可微分多様体の定義の意味が良くわかりません．

答． こんにちは．何でも美味しい時期ですが，いかがお過ごしですか？さて回答ですが，可微分多様体とは，ユークリッド空間の開集合や円周や球面などのなめらか曲面などを，抽象化，一般化した概念です．なめらかな曲面の特徴としては，全体では平面 (２次元ユークリッド空間) とは違うけれど，その一部分は，平面の開集合と (なめらかに曲がっていることを除けば) 同じである，ということが言えます．円周の場合は，どの点の周りでも，局所的には，直線の一部と (なめらかに曲がっていることを除けば) 同じですね．このような特徴 (性質) を「局所座標系」がある (あるいは同じことを逆にとらえて,「パラメータ付け」ができる) という形に抽象化して述べたのが，m 次元可微分多様体の定義です．つまり，$X \subseteq \mathbf{R}^k$ が m **次元可微分多様体**であるとは，X の各点 $x \in X$ に対し，$\mathbf{R}^k$ における x の開近傍 U と，$\mathbf{R}^m$ の開集合 V と，それらの間の微分同相写像 $\varphi : U \cap X \to V$ がある，ということです．$U \cap X$ が「X の一部分」に該当し，それが，φ を通して，$\mathbf{R}^k$ に写るときの，座標が実際に動く範囲を V が表しているのです．また，φ が微分同相写像であるということが,「曲がり方がなめらか」であることを意味しています．たとえば，平面の３角形，４角形 (の縁) などは，可微分多様体ではありません．(「位相多様体」というものではありますが).

問． パラメータ付けとはどんなものですか？

答． 多様体の一部分をパラメータで表示する，ということです．

問． どうして，$\psi : U \to W \cap M \subseteq \mathbf{R}^k, \psi(u) = x$ をパラメータ付けと言うのですか？今まで習ったパラメーターとは，雰囲気がだいぶ違うような気がします．今までなら「$x = x(t), y = y(t), t \in I$」のようだっだと思います．

答． 良い指摘をしてくれました．実は，皆さんが既に習っているものと同じものです．たとえば，単位円 $S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$ を例にとってみましょう．S^1 のパラメータ付けとしては，たとえば，$\psi(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ があります．また，ほかにも，$\psi : (-\pi, \pi) \to \mathbf{R}^2, \psi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ もパラメータ付けです．(実際，これは，開区間 $V = (-\pi, \pi)$ と $U \cap S^1$ (ただし，$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) \neq (-1, 0)\}$ の間の微分同相写像です)．つまり，$x = \cos t, y = \sin t$ というやつを多様体の一般論で説明しているだけです．自然ですね．

問． 可微分多様体の例 $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ をもう一度説明してください．

答． $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ が多様体であることを示すには，各点のまわりに局所的な座標系がとれればよいので，それを説明してみます．たとえば，点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in S^1$ について考えてみましょう．このとき，$\mathbf{R}^2$ における x の開近傍 U を決め，$\mathbf{R}^1$ の開集合 V を決め，微分同相写像 $\varphi : U \cap S^1 \to V$ を決めなくてはいけません．そのようなもの (U や φ の取り方) はたくさんあるのですが，とにかく「存在」を示せばよいので，１つ具体的に与えてしまいます．U としては，$U := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ を選びましょう．V としては，$V := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$ を選びましょう．そして，$\varphi : U \cap S^1 \to V$ を，$\varphi(x, y) = x$ (x 軸への射影の $U \cap S^1$ への制限) という写像に選びましょう．この φ が微分同相写像であることを示すにはどうすればよいか．講義で説明した定義にあてはまるかどうかチェックすればよいわけです．つまり，φ が同相写像で，φ が可微分で，φ^{-1} が可微分であることが，確かめるべきことですね．まず，φ が可微分であるかどうか．それは，φ が $\mathbf{R}^2$ の開集合上の可微分関数に拡張できるかどうか，ということでしたね．実際に，$\Phi : U \to \mathbf{R}, \Phi(x, y) = x$ が φ の可微分な拡張となっているので，φ は可微分です．また，可微分であることから，連続であることも導かれます．つぎに，$\varphi : U \cap S^1 \to V$ が全単射であることを示しましょう．(これは簡単なので省略)．そして，その逆写像 $\varphi^{-1} : V \to U \subset S^1$ が可微分であるかどうか，ということは，$\varphi^{-1} : V \to \mathbf{R}^2$ とみなしたときに可微分写像かどうか，ということですが，$\varphi^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ なので，これは，V 上で可微分です．(したがって連続でもあります)．以上のことから，φ が同相写像で，φ が可微分で，φ^{-1} が可微分であることが示されました．(一般の証明の場合は，場合分けをして示します).

問． m 次元可微分多様体の次元についてですが，たとえば，$S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ なので，S^n は $n+1$ 次元可微分多様体ではないのでしょうか？

答． ちがいます．多様体の次元は，多様体そのものの次元です．入れ物の次元のことではありません．次元とは，直感的には「自由度」のことで，たとえば，円周 $S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$ の場合なら，$\mathbf{R}^2$ を自由に動けるなら，自由度はもちろん 2 ですが，S^1 の上に拘束 (こうそく) されているので，自由度は，あくまで 1 です．S^1 の次元は 1 です．同じように，S^n の次元は n です．

問． 可微分多様体でなければならないのは，どのような場面ですか？

答． たとえば，接空間を定義するためには，可微分多様体でなければいけません．

問． 可微分写像の定義の必然性がわかりません．$X \subseteq \mathbf{R}^k, Y \subseteq \mathbf{R}^\ell$ に対し，可微分写像 $f : X \to Y$ を定義する際，$\forall x \in X$ に対し，x の開近傍 U のとり方を，X の open set としてとるのではなく，$\mathbf{R}^k$ の open set としてとるのは，何か意味があるのでしょうか？

答． 意味があります．X がもともと $\mathbf{R}^k$ の開集合ならば，微積分学で習ったように，微分可能とか，C^∞ 級であるとかが，すでに定義されていますが，X が開集合とは限らないときには，まだ定義されていないからです．たとえば，$k = 2, \ell = 1$ として，$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 上の関数 $f : X \to \mathbf{R}$ を $f(x, y) = x^2 + y^2$ を考えましょう．これは，X 上で微分可能でしょうか？もし，皆さんが微積分学を正しく習っていたとしたら,「X の境界の点では判定できない」と答えるのが正解です．もう一例．$k = 1, \ell = 1$ として，$X = \{\frac{1}{n} \in \mathbf{R} \mid n = 1, 2, \dots\}$ 上の関数 $f(\frac{1}{n}) = \sqrt{n}$ は微分可能でしょうか？答は,「$\mathbf{R}$ の開集合上で定義されていないから，答えることは不可能」というのが正解です．関数のある点での微分係数 (ここでは高階偏微分係数も含む) を定めるためには，その関数が，その点の近傍で定義されていなければなりません．微分は，極限を使って定義されるものだからです．(一変数関数の場合には,「片側極限」「片側偏微分係数」というものも考えますが，これは一変数だけの特殊事情です)．そもそも微分とは，関数の周辺での挙動を調べるためのものです．高校時代に増減表を書いて何を調べたかを思い出しましょう．にもかかわらず，X が $\mathbf{R}^k$ の開集合でないときにも，可微分であるとか，可微分でないとかを，なんとか定義したい，なんとかならないか，という要求から，ここで新たに定めものが講義で紹介した定義なのです．上の最初の例では，$f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ 全体で可微分な

関数 $F(x,y)=x^2+y^2$ に拡張されるので，($\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合なので) 可微分ということになります．２番目の例では，$f(\dfrac{1}{n})$ は，$\mathbf{R}-\{0\}$ 上の可微分な関数 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ に拡張できるので可微分ということになります．ですから，この講義で定義した「可微分」は，ふつうの微積分学の範囲を超えている，ということを自覚しましょう．超えているけれど，その定義は，もちろん，微積分学を基礎にしています．皆さんが慣れ親しんでいる微積分学を基に，可微分性を定義したわけです．

問． U は閉集合ではいけないのですか？

答． 上で説明したように，開集合でなければ，論理的な整合性がなくなってしまいますね．

問． 可微分写像とは，微分可能と同じ意味ですか？

答． そうですが，より正確に言うと，ここでは,「無限回微分可能」と同じ意味で使っています．

問． $F|_{U\cap X}=f|_{U\cap X}$ が良くわかりません．

答． $U\cap X$ に属する点 x については $F(x)=f(x)$ である，ということです．

問． id_X や $F|_{U\cap X}$ は何を示していますか？

答． id_X は，X 上の恒等写像，つまり，$\mathrm{id}_X(x)=x(x\in X)$ という写像を意味し，$F|_{U\cap X}$ は F の $U\cap X$ への制限を意味しています．

問． この講義での可微分写像の定義では，(普通の意味で可微分多様体でないような) 特異点を持ったものを定義域にするような可微分写像などを定めることが出来るのでしょうか？

答． まさにその通りです．(この講義では詳しくは扱いませんが)．

問． 微分同相写像の例を教えてください．$\mathrm{id}_{\mathbf{R}}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は微分同相写像ですが，他に何か例があれば教えてください．

答． 例をたくさん見つけるということは，数学を理解する一番良い方法ですね．たくさんありすぎてどれを挙げれば良いか迷いますが，たとえば，$\exp:\mathbf{R}\to(0,\infty)\subseteq\mathbf{R}$ は微分同相写像です．

問． 「同相」と「同型」はこの講義中使いわけていますか？

答． はい．この講義に限らず使い分けています.「同相」とは別名「位相同型」ともよび，位相空間の間で使います.「同型」とは，詳しくは「ベクトル空間の同型」であり，ベクトル空間の間で使います．位相空間とベクトル空間はまったく異なる概念なので，絶対に混同してはなりませぬ．

問． 接空間の説明のところで，$(\psi_*)_u(h):=\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\{\psi(u+th)-\psi(u)\}$ はおかしいのでは？ $(\psi_*)_u(h):=\lim_{t\to0}\dfrac{\psi(u+th)-\psi(u)}{th}$ のほうがしっくりくるような感じがするのですが．

答． 「感じ」で判断しては危険なので，あくまで理性で判断してみましょう．$(\psi_*)_u:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^\ell$ なので，$h\in\mathbf{R}^k$ です．つまり h は「ベクトル」です．そのベクトル h が分母にくるのはおかしいですね．$(\psi_*)_u(h)$ は，ψ という写像の，点 u で，ベクトル h 方向にどのくらい変化しているかを表す「方向微分」を意味しています．つまり，(点 u を通り，方向ベクトルが h の直線上で定義された) $\Psi(t):=\psi(u+th)$ という t 変数 (ベクトル値) 関数の，t に関する微分係数です．ですから，あくまで，$\lim_{t\to0}\dfrac{\psi(u+th)-\psi(u)}{t}$ なのです．

問． 接空間の定義の $(\psi_*)_u(\mathbf{R}^m)$ の表すものがわかりません．$(\psi_*)_u$ は $\mathbf{R}^m$ を $\mathbf{R}^k$ に写す写像ということは，$(\psi_*)_u(\mathbf{R}^m)=\mathbf{R}^k$ ですか？違うということはわかるのですが．

答． どうして違うかというと，$(\psi_*)_u$ の値域 (target,「とりうる」値の集合) は，確かに $\mathbf{R}^k$ なのですが，$(\psi_*)_u$ は全射とは限らないので，$(\psi_*)_u(\mathbf{R}^m)$ が $\mathbf{R}^k$ に一致するとは限らず，その一部分 (真部分ベクトル空間) になる場合もあるからです．

問． 接空間という概念は，複素多様体でも考えられますか？

答． 考えられます．ただし，注意が必要です．たとえば，コンパクトな (複素 1 次元以上の) 複素多様体は (n をいくら大きくとっても) $\mathbf{C}^n$ に埋め込むことはできません．コンパクトな複素多様体上の正則関数は定数に限るからです．詳しくは，複素多様体の入門書 (図書室で,「複素多様体」で検索するとよい) で調べてみることをお勧めします．

問． 「微分同相写像」と (複素多様体の)「正則写像」というのは関係あるものなのでしょうか？

答． どちらかというと,「可微分写像」(differentiable mapping) と「正則写像」(holomorphic mapping) とが (アナロジーとして) 対応し,「微分同相写像」(diffeomorphism) と「複素解析的同型写像」(analytic isomorphism) が対応します．ちなみの線形代数の「正則行列」は regular matrix で，同じ「正則」と訳していても，違う意味をもっています．

問． 今日の講義では，補助プリントにあるような抽象的な多様体の定義とはちがう方法がとられましたが，今後どんな「いいこと」があるのですか？

答． 多様体の導入が比較的簡単であるというメリットがあります．

問． T_xM は M を $\mathbf{R}^\ell$ にうめこまずには定義できないのでしょうか？

答． 定義できます．すでに多様体の講義 (幾何学３) で，習った (もうすぐ習う) と思います．

問． 抽象的な多様体の定義の「抽象的な」というのはどういうことですか？

答． 位相空間から出発するか，ユークリッド空間の部分空間から出発するか，の違いを表現しました．位相空間の方がユークリッド空間より「より抽象的」である，と考えられるからです．もちろん，ユークリッド空間も抽象的です．たとえば，$\mathbf{R}$ (数直線) は，皆さんが中学か高校からずっとお馴染みであり，ある程度，具体的なイメージを持っていると思いますが，でも，$\mathbf{R}$ は実在しないですよね．数直線を見た人はだれもいません．この世に $\mathbf{R}$ は実在するものではありません．あくまで，われわれが頭の中に作った人工物です．つまり抽象の産物です．ユークリッド空間も抽象的です．ただし，抽象の度合いからいうと，位相空間は，ユークリッド空間をさらに抽象化したものだから，抽象の度合いが高いというわけです．

問． 多様体の定義が複数あるのはなぜですか？

答． 大切なものだからです．

問. manifold と variety の違いについてですが，やはり特異点が含まれた場合は，より難しくなるのですか？

答. そうですね．case by case ですね．ところで,「特異点」とはどういう意味で言っているかわかりますか？

問. ホイットニーの定理の「うめこまれる」とはどういうことですか？「うめこむ」とはどういうことですか？

答. (この場合) ユークリッド空間の中の多様体との間に微分同相写像を１つ作る，ということです．

問. 射影平面 $\mathbf{R}P^2$ を $\mathbf{R}^4$ に埋め込むにはどうすればよいのですか？

答. 説明が難しいですね．射影平面を，まず $\mathbf{R}^5$ の中へ埋め込みます．そのために，まず $g: S^2 \to S^5 \subseteq \mathbf{R}^6$ を $g(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx)$ と定めます．(S^2 や S^5 などは，単位球面と思っている)．$g(-x,-y,-z) = g(x,y,z)$ なので，g は写像 $h: \mathbf{R}P^2 \to S^5$ を誘導しますが，h は,「埋め込み」であることが証明できます．さらに，S^5 から１点を除くと，$\mathbf{R}^5$ と微分同相になるので，$\mathbf{R}P^2$ が $\mathbf{R}^5$ に埋め込まれます．さらに，詳しく調べると，$\mathbf{R}^5$ から $\mathbf{R}^4$ への射影をうまく選べば，$\mathbf{R}P^2$ が $\mathbf{R}^4$ に埋め込まれることが証明できます．

問. たとえば，トーラス T^k を $\mathbf{R}^n$ にうめこむことができると思います．どのようにして考えればよいのでしょうか?

答. S^1 は $\mathbf{R}^2$ に埋め込まれるので，$T^k = (S^1)^k$ は $\mathbf{R}^{2k} = (\mathbf{R}^2)^k$ に埋め込まれます．ただし，もう少し次元の低いユークリッド空間に埋め込むこともできて，たとえば，普通の２次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ は $\mathbf{R}^4$ だけではなく，$\mathbf{R}^3$ にも埋め込むことができますね.

問. すべての可微分多様体を $\exists\mathbf{R}^n$ にうめ込めるというホイットニーの定理ですが，うめ込んだものは一意的に定まるのですか？

答. 写像としては，１つには決まりません．たとえば，自由に平行移動できますね．でも，１つの多様体を実現するものたちは，すべてお互いに微分同相になります.

問. Whitney の定理で，可微分多様体 $M \subseteq \mathbf{R}^k$ が十分次元の高い Euclid space $\mathbf{R}^\ell$ に埋めこむことができるというのは，$M \subseteq \mathbf{R}^k$: submanifold となるということではないですよね？(すなわち包含写像 $\iota: M \to \mathbf{R}\ell$ が埋めこみであるとは限らない).

答. submanifold となるということです．埋め込みになるということです.

問. ホイットニーの定理を理解する必要はあるのですか？この定理は役に立つものですか？

答. 個人差があるので，何とも断定はできません (するべきではないです) が，あえて言えば，役に立つ定理であり，でも，とりあえず今の段階では,「世の中には，そんなすごい定理があるのか」と感動 (または感心) しておいてもらえば十分です.

問. 「連続的ベクトル場」とは何のことですか？

答. $\mathbf{R}^m$ でのベクトル場 (ベクトル値関数) は，m 個の関数の組 $(a_1(x_1,\dots,x_m), a_2(x_1,\dots,x_m), \dots, a_m(x_1,\dots,x_m))$ で表されるのですが，それが (考えている定義域の上で) 連続関数である，ということです．つまり，直観的には「ベクトルが連続的に動いている」ということです.

問. パラコンパクト空間とは何ですか？

答. ここでは本題と関係しないので説明を控えて，参考文献だけを挙げておきましょう．図書室で調べてみることをお勧めします．松島与三著「多様体入門」裳華房，泉屋・石川著「応用特異点論」共立出版 (我田引水).

問. 微分トポロジーとは「部分集合 $X \subseteq \mathbf{R}^k$ の微分同相写像で不変な性質の研究」とのことですが,「不変な性質」とはどういうことですか？

答. 良い質問ですね．たとえば,「可微分多様体である」という性質は，微分同相写像で不変です．つまり，$X \subseteq \mathbf{R}^k$ と $Y \subseteq \mathbf{R}^\ell$ の間に微分同相写像があり，X が可微分多様体ならば，Y も可微分多様体になります．また，次元も一致します．次元のように，不変な量 (数) のことを，**不変量** (invariant) とよび，数学で大事な研究対象になります.

問. J. Milnor という人は，何を研究した人なのですか？

答. 微分トポロジーです．興味があったら,「数学辞典」などで調べることをお勧めします.

問. 昨年の幾何学３も受講していたのですが，そのときと接平面等をとる対象がちがうのですか？昨年は T_xN と書いていたと思うのですが，今日は T_xM と書いています.

答. 多様体を M と書いたか，N と書いたか，の違いだけです．たとえると，$x^2+x+1=0$ と書いても，$t^2+t+1=0$ と書いても”本質的に同じ”２次方程式ですね．それと同じことです.

問. 演習を解いた場合，提出場所や締切りなどはどうなるのでしょうか？また，解答などは教えていただけるのでしょうか？成績にどれくらい影響するのかも知りたいです.

答. 講義で提示する演習問題は，提出する必要がありません．小テストのための準備として各自解いておいてください．解答は，テストに出題したものについては説明すると思いますが，テストに出る前に解答を教えることはしません．なぜなら，それではテストにならないからです．ところで，第１回の講義で渡した，英文の演習問題については，プリントでも説明してあるように，もし解けたら，そして正しく解けたという自信がある場合にのみ，直接私 (石川) に提出してください．(言い方がすこし挑発的ですか)．たとえば，現在，大学院への進学を希望している人や，学校や企業などで数学を教える (「教わる」ではなくて,「教える」) 立場になるかも知れない人は，ぜひチャレンジしてみてください．でも，基本的に，質問書と小テストで (絶対評価で) 成績を付けるので，それ以外の人も安心して受講してください．ところで質問とはまったく関係ないですが，私 (石川) は常々思っているのですが，数学，あるいは一般に科学とは,「神々の興じるゲームのルールを知ること」ではないでしょうか？皆さんはどう思いますか？これは，もののたとえなのですが，神様たちが何か楽しそうに遊んでいる．何をしているんだろう？どんなゲームだろう？と好奇心を持つ．神様に直接ルールを尋ねても教えてはくれない．でも，しばらくゲームをのぞいているうちに，何となくルールが推測できる．こんなルールかな，本当かな？と少し自分で検討してみる．そうして「わかった」と思って，仲間に入れて，と神様に言う．でも，実はルールを勘違いしていて，痛い目にあう．(相手は神様なので「バチが当たる」)．引き下がって，もう一度考えてみる．さらによく観察する．いろいろ可能性をさぐる．また痛い目にある．その繰り返しですね．ではまた.