幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. １２ (２００２年２月７日) の分

問． 全ての多様体がユークリッド空間に埋め込まれることから，ユークリッド空間の部分空間としての多様体に言えることは，すべての多様体に言えると思ってよいのですか？

答． こんにちは．今日は，これから小テスト (２回目) があります．持ち込み自由，カンニング禁止です．時間は４０分です．さて回答ですが，その通りです．ただし，ユークリッド空間にどのように入っているか，ということにかかわることに関しては，多様体独自の性質以上の情報を含むこともあります．たとえば，(境界上の)Gauss 写像の話をしましたが，これは多様体のユークリッド空間にどのように入っているか，という情報をもっています．多様体固有の性質ではありません．

問．「$v : X \to \mathbf{R}^m$ 可微分ベクトル場が，孤立零点のみを持ち，∂X で外向きとすると，$\sum_{x_0 \in X, v(x_0)=0} \mathrm{ind}_{x_0} v = \deg(g)$」の証明中の「$\bar{v}|_{\partial X} \simeq g$」 を詳しく説明してください．

答． ∂X 上で，$\bar{v}$ も g も外向き単位ベクトル場なので，$(1-t)\bar{v}(x) + tg(x)$ $(t \in [0, 1])$ は 0 をとらない ∂X 上のベクトル場です．これを，その長さで割れば，∂X から S^{m-1} への写像としての $\bar{v}$ と g を結ぶ可微分ホモトピーを与えます．

問． $\deg(g)$ と Euler 標数の関係を教えてください．この補題が Poincaré-Hopf の特別な場合というのは私の聞きまちがいだったのでしょうか？

答． 結果的には $\deg(g) = \chi(X)$ です．でも，その証明は講義では与えません．(モース理論というものを準備することが必要になります)．ですから，特別な場合のちょっとだけ弱い結果ということです．

問．「∂Y は ∂X といくつかの S^{m-1} からなる」というのは，ある零点のまわりを取り除いたもの１つに対し，１つの S^{m-1} ということですか？「いくつか」というのは，零点の数と一致するのですか？

答． ずばりその通りです．

問． 半径 ε の球をとりのぞいたものだから S^{m-1} ではない気がします．半径 1 の球をとりのぞいたのなら，わかる気がするのですが．

答． 確かに厳密に言うと $S^{m-1}_{\varepsilon}(x_0)$ とでも書くべきですね．でも，これらは S^{m-1} と微分同相なので，それと同一視した次第です．

問． $\sum_{x_0 \in X} \mathrm{ind}_{x_0} v$ の前にマイナスがつく説明で,「ε-球面の向きづけは，∂Y としての向きづけと逆」とありますが，どうして逆なのかわかりません．この前までの証明では向きについては何もいっていないのでわかりません．

答． ind は写像度を使って定義したので，そこで向きを決めていたことになります．つまり，$\mathrm{ind}_{x_0} v := \deg(\bar{v} : S^{m-1}_{\varepsilon}(x_0) \to S^{m-1})$ と定義したわけですが，写像度を考えるためには，S^{m-1} などに向きを与えなければならないわけです．そして，それは，$S^{m-1} = \partial D^m$ と見て向きを入れています．その逆の向きは，S^{m-1} を外側の領域の境界と見て入れた向きです．つまり，∂Y としての向きづけは ind を考えるときの向きと逆になるわけです．

問． 講義の中の証明で，$(v_*)_{\psi(u)}(\psi_*)_u e_i = (v \circ \psi)_{*u} e_i$ という式の変形がありましたが，このような式の変形はどのように考えればよいのでしょうか？

答． 偏微分に関する連鎖律「**合成写像の微分は，微分写像の合成**」です．(復習ポイント：合成写像の偏微分)．

問．「$(v \circ \psi)_{*u} e_i = \dfrac{\partial v(\psi(u))}{\partial u_i}$ となる」という部分がどうしてか，よくわからなかったので教えてください．

答． 微分写像 $(v \circ \psi)_{*u}$ はヤコビ行列 $\left(\dfrac{\partial v(\psi(u))_j}{\partial u_i} \right)$ で表現されます．カッコの中は，行列の (j, i) 成分です．第 i 列ベクトルは $\dfrac{\partial v(\psi(u))}{\partial u_i}$ と表されます．これが，第 i 基本ベクトル e_i の像というわけです．(復習ポイント：微分写像とヤコビ行列)．

問． $(v_*)_{x_0} : T_{x_0} M \to T_{x_0} \mathbf{R}^k$ の像が $T_{x_0} M$ に含まれることを証明するには，$T_{x_0} M$ の基底の１次結合であらわされることを示すことですか？

答． そうです．$T_{x_0} M$ の基底の１次結合で表されるということは $T_{x_0} M$ に属するということです．

問． 補題の証明の中で，$\mathrm{ind}_{x_0} v = \mathrm{ind}_0 v'$ は何故でしょうか？

答． これが，$\mathrm{ind}_{x_0} v$ の定義だからです．(復習ポイント：多様体上のベクトル場の零点の指数)．

問． No.11 の回答書に「$f : V \to V'$ を $\mathbf{R}^m$ の開集合 V, V' の間の微分同相写像，w を V 上の可微分ベクトル場としたとき，f が向きを保つ場合には，f と恒等写像の間の可微分アイソトピーをつかって，$\bar{w}$ と $\bar{w'}$ (ただし，$w' = (f_*) \circ w \circ f^{-1}$) の間の可微分ホモトピーを構成する」とありますが，その構成を教えてください．

答． ごまかそうと思ったところを，きっちり突いてきますね．次の定理を使います:「$\mathbf{R}^m$ の向きを保つ微分同相写像 $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ は恒等写像と可微分ホモトピックである」．この定理の証明：一般性を失わずに，$f(0) = 0$ として証明してよいわけですが，このとき，$F(x, t) := \dfrac{1}{t} f(tx), (t \neq 0)$ とおくと，$F(x, t) = \dfrac{1}{t} \dfrac{d}{dt} \int_0^t f(tx) dt = \int_0^t \sum_{i=1}^m x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ なので，$g_i(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ とおくと，$F(x, t) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(tx)$ と表されます．これは $t = 0$ でも可微分で，$f(x)$ と f の微分写像との間の可微分ホモトピーを与えます．さらに，微分写像は，向きを保つので，恒等写像写像と可微分ホモトピックです．

問． det と ind の関係がよくわからないので詳しく教えてください．

答． ここでは簡単のため，線形写像 $v : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m, v(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \det(A) \neq 0$ について，それをベクトル場とみたときの零点 0 の指数が，$\det(A) > 0 \Rightarrow \mathrm{ind}_0 v = 1, \det(A) < 0 \Rightarrow \mathrm{ind}_0 v = -1$ という具合に求められることを確かめてみましょう．$\bar{v} : S^{m-1} \to S^{m-1}$ の写像度を求めればよいのですが，v は外向きベクトルを外向きベクトルに写すので,「$\bar{v}$ が向きを保つ $\Leftrightarrow$ v が向きを保つ」が分かります．ところが，v が向きを保つ $\Leftrightarrow \det(A) > 0$, なので，上のことがわかるわけです．(復習ポイント：写像度)．

問．『ベクトル場 v の零点 x_0 が非退化』というところがわかりません．代数系で学んだ「非退化な一次形式」などと同じなのでしょうか？ベクトル場 v の零点 x_0 が非退化であることと，リー代数のキリング形式が非退化であることは何か関連があるのですか？

答． 対象が違うのでまったく同じというわけではありませんが，ある条件があって，その条件がみたされれば状況は簡単，みたされないと少し複雑になるという場合，その条件が成り立つときを「非退化」とよび，残念ながら条件が成り立たないときを「退化」とよびます．１次形式の場合は，それを行列 A で表したとき，それが正則の場合，つまり，条件 $\det A \neq 0$ が成り立つ場合を「非退化」と言います．条件 $\det A \neq 0$ が成り立たない場合，つまり， $\det A = 0$ になってしまう場合に「退化」と言います． ちなみに，生物の進化，退化とは関係ありません．

問． $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ について，正射影は $\mathrm{ind} = 1$ の零点を２つ持つということについてわからなかったので証明してほしいです．

答． 都合により，略解だけを書きます．くわしい証明は，自分で考えてください．まず，ベクトル場 v は $(0, 0, 1) - x_3(x_1, x_2, x_3) = (-x_1x_3, -x_2x_3, 1 - x_3^2)$ と (横ベクトル表示で) 表されます．v の零点は $x_1 = 0, x_2 = 0$ から北極と南極です．局所座標系を，$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ で誘導されるものにとると，v の局所表示は，たとえば北極の近傍においては，$v(x_1, x_2) = (-x_1\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, -x_2\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$ と表されます．これのヤコビ行列 (の $(0, 0)$ での行列式の正負) を調べれば $\mathrm{ind} = 1$ であることが結論づけられます．

問． 多様体上での積分は定義できるのですか？

答． できます．来年度の幾何学５ではその話題が扱われるので，興味があれば受講することをお勧めします．

問． 種数 (genus) g の g 人のり浮き袋のオイラー標数について，たしか答は $2 - 2g$ であったと思うのですが，それは大きな直方体 (標数２) から g 個の直方体を取り除くからと考えてもよいのでしょうか？

答． 良いアイディアですね．正確に言うと，大きな直方体の表面から $2g$ 個の正方形を切り取ってオイラー標数は $2 - 2g$ になる．そして，開いた穴を２つずつトンネルでつなげてもオイラー標数が変わらないので $2 - 2g$ ということです．

問． ４次元における単位球や立方体はどのようになっているのですか？３次元における立方体を２次元の展開図に表されるのだったら，４次元の展開図を３次元で考えることはできないでしょうか？

答． おもしろい発想ですね．できます． ４次元における立方体 I^4 を考えると，その表面は，$2 \times 4 = 8$ 個の３次元立方体から成っています．(ちなみに頂点は $2^4 = 16$ 個)．その展開図は，立方体の積み木を想像して，まず１個を置き，その四方を４個の立方体で囲み，最初の中央にある立方体の上に２個の立方体を重ねておけばでき上がりです．(展開図は，３次元の場合と同じでいろいろあり得ます)．その図形を「折りたたむ」ことを思い浮かべるには少し想像力が必要ですが，なんとか頑張れば，４次元立方体の表面 (４次元球面 S^4 と同相) を想像できます．

問． 別の講義で，M 上の関数環の位相 $\leftrightarrow$ M の位相，らしきものが出てきましたが，このようにベクトル場 $\leftrightarrow$ 位相的性質，というようなものを示唆する他の定理はあるでしょうか？

答． 質問の意図と違うかもしれませんが，次のような定理は知られています:「M, N を可微分多様体，$C^\infty(M), C^\infty(N)$ をそれぞれ M と N 上の可微分関数のつくる $\mathbf{R}$-代数とする．このとき，$C^\infty(M)$ と $C^\infty(N)$ が $\mathbf{R}$-代数として同型であるための必要十分条件は，M と N が微分同相であることである.」「M, N を可微分多様体，$\mathcal{X}(M), \mathcal{X}(N)$ をそれぞれ M と N 上の可微分ベクトル場のつくる Lie 代数とする．このとき，$\mathcal{X}(M)$ と $\mathcal{X}(N)$ が Lie 代数として同型であるための必要十分条件は，M と N が微分同相であることである.」

問． ポントリャーギンはロシアの盲目の数学者と聞いたことがあります．彼の著書で微分方程式の話を読んだことがあります．盲目ながら抽象論理が見えるのはすごいと思いました．

答． そうですね．抽象的なものは心の眼でしか見えないので，ハンディキャップにはならないわけですね．

問． どうしたら数学が得意になれますか？高校の頃は好きだったのに，近頃めっきりだめです．ノートを見るだけで，げんなりしてきます．もう，手遅れでしょうか？

答． 何ごとにも「手遅れ」ということはありません．ところで，高校の数学と大学の数学はもちろん同じ数学ですが，すこし性格の違う面もあるので注意しましょう．それから，数学が得意になる一番良い方法は，問題を解くことです．私 (石川) の経験でいうと，微積分の教科書にある，ある練習問題を一題解くのに一週間かかったことがあったのですが，それ以来，妙に自信が出てきたのを記憶しています．これからは，数学の問題を短い時間に正確に解かなければならない，などということはあまり必要なくなると思うので，発想をかえて，時間をかけて何かを集中して考えてみる，というのも良いかもしれません．

問． 大学院に行きたいのですが，試験はどのようなものですか？何を勉強すればよいのですか？

答． 自分が興味をもったこと，おもしろいと思うことを勉強してください．試験は，いままでどんなことをどう勉強してきたか，これからどんなことを勉強したいか，ということが問われます．

問． 数学は様々な分野があっても，それらは結びついていることを知りました．そこで，この講義で学んだ『多様体』は何に活かせますか？

答． 多様体の発想は，地方の時代にマッチしているかもしれません．それはともかく，幾何，代数，解析などへのオーソドックスな応用の他に，たとえば,「超ひも理論」にも活かせるし,「金融工学」にも活かせるし,「量子コンピュータ」にも活かせます．ただし，それらの応用はすでに発見されてしまったことなので，新しい応用を見つけられるかそうかは，実は皆さんの今後の活躍にかかっているわけです．多いに期待しています．

問． 最近思うことは，社会に出たあと数学科で学んだことがどんな思いがけない所で役に立つのか少し楽しみです．

答． 毎日役に立つと思うので，毎日楽しみにしてください．それから，数学科出身ということで，周囲から頼りにされると思います．その期待を裏切らないように，日々勉強を怠らないようにしてください．(北大数学科出身と聞いたけれどたいしたことないな，などと言われないように)．それはともかく，これからは，大学を出てから自力で勉強できるかどうかで人生がだいぶ変わってくる時代になったことを自覚しましょう．

問． レポートのしめ切りはいつまででしょうか？

答． 特にありません．この講義の成績をつけるまでは，一応，評価の対象にしますが，まあ，そんなことはあまり気にしないで，それ以降でも解けたらいつでも私 (石川) に持ってきてください．成績とは関係ないですが歓迎します．いわば**生涯レポート**です．ところで，喜ばしいことに，先日レポート問題のうち，$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ が解かれました．y が $f \circ g$ の正則値のとき，$f^{-1}(y)$ の各点が，g の正則値であることに触れれば完璧でしたが，ともかく正しく解かれたようです．

さて，半年間つたない講義につきあって頂いてありがとうございました．この講義を通して多様体論の真髄が少しでもわかってもらえたら本望ですが，どうでしたか？では，またお会いできる機会をたのしみに．Good bye!