幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. １１ (２００２年1月３１日) の分

問． Gauss 写像 $g(x)$ について，法線ベクトルを S^{m-1} の点とは言えるのでしょうか？Gauss 写像の定義で，$X \subseteq \mathbf{R}^m$：境界つきコンパクト m 次元多様体としたとき，$g : \partial X \to S^{m-1}, x \mapsto g(x)$: x における外向き単位法線ベクトル，なる g を Gauss 写像と定義しましたが，$g(x) \in S^{m-1}$ となるのはなぜですか？

答． こんにちは．最近は良い天気が続いていて何やら春の気配がしますね．雪まつりの雪像は大丈夫でしょうか．ところで，来週は小テストを予定しています．詳細については，この回答書の後半を御覧ください．さて回答ですが，単位ベクトルという意味は，長さが１という意味で使っているので，単位球面 S^{m-1} に属します．

問． Poincaré-Hopf の定理で,「v を孤立零点だけをもつ M 上の可微分ベクトル場とするとき」とありますが，これはどういうことですか？どういうベクトル場ですか？

答． M 上の**ベクトル場** v **の零点**とは，$v(x_0) = 0$ となるような点 $x_0 \in M$ のことを言います．v の零点 x_0 が**孤立している**とは，x_0 のある近傍上には他の点がないこと，つまり，$\exists U \subseteq M$ x_0 の近傍；$\forall x \in U, v(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$ ということです．v が**孤立零点だけをもつ**とは，v の零点がすべて孤立しているという意味です．他の例としては「孤立臨界点だけをもつ関数」「孤立点だけをもつ位相空間」などという表現がありますね．

問． ベクトル場の孤立零点の指数の例で，$v : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, v(z) = z^k$ に対して，$\mathrm{ind}_0 v = k$ となることを証明してください．

答． $z^k = 0$ となるのは，$z = 0$ の場合に限るので，0 が唯一の零点です．0 の周りの単位円 $S^1 = \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\} \subset \mathbf{C}$ 上で $\bar{v}(z) = \dfrac{1}{|v(z)|}v(z) = \dfrac{1}{|z^k|}z^k = \dfrac{1}{|z|^k}z^k = z^k$ です．$\bar{v} : S^1 \to S^1$ です．この写像度を計算すればよいわけですが，$\bar{v}$ は正則点だけをもつ (臨界点はない) ので，したがって値域のどの点も正則値なので，特に，$1 \in S^1$ の逆像を調べると，$z^k = 1$ を解いて，$z = e^{\frac{2m\pi i}{k}}, m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ (１の k 乗根) の k 個の点からなり，そのどの点でも，$\bar{v}$ は向きを保つので，$\deg(\bar{v}) = k \times 1 = k$ となります．(この場合は，0 以外に零点がないので ind の定義のところの ε は $\varepsilon = 1$ にとって計算すれば十分です)．証明終わり．

問． Poincaré-Hopf の定理を使う例を教えてください．

答． たとえば応用として,「S^m 上に零点を持たないベクトル場が存在すれば，m は奇数である」ということが証明されます．

問． Euler 標数を求めることからベクトル場の指数が求められることは分かりましたが，他にどのような時に用いるのですか？

答． Euler 標数を求めることからベクトル場の指数が求められる，ということではありません．あくまで，**ベクトル場の零点の指数の和が** Euler **標数に等しい**という定理です．Euler 標数は Euler 標数で求め (つまり，ホモロジー群を計算したり，単体分割して単体の数を数えたりして求め)，それとは別に，ベクトル場の零点の指数は，ベクトル場の零点の指数で求め (つまり，写像度を計算して求め) ます．あらかじめ２つのものに関係はまったく見い出せません．まったく見い出すことができないところに，関係があることを見つけた Poincaré **は偉い**わけです．まあ，定理を素直に鑑賞してください．たとえると，モナリザの絵をむりやり壁紙として用いるよりは，ルーブル美術館に飾って鑑賞したほうが役に立つということです．

問． $\mathrm{ind}_{x_0}(v) := \deg(\bar{v})$ の定義は well-defined ですか？$\varepsilon > 0$ を十分小さくとると，ind は v のとり方によらないということですか？$x_0 \in U$ のとり方によらないということですか？

答． ε のとり方によらない，ということです．

問． $\mathrm{ind}_{x_0}(v) := \deg(\bar{v})$ $\varepsilon > 0$ は十分小さければとり方によらず ind はきまる，がよくわかりません．写像度はホモトピー不変量のひとつなので，ind を決めることができるのですか？もしそうなら，$\varepsilon > 0$ が十分小さくないといけないのがなぜなのかよくわかりません．

答． ε-近傍の中に他の零点が入ってくるとホモトピックでなくなるからです．そのために，ε は他の零点が入り込まない程度に小さくとる必要があります．

問． $\overline{v}_\varepsilon : S^{m-1}_\varepsilon(x_0) \to S^{m-1}$ を $v \mapsto \dfrac{1}{\|v(x)\|}v(x)$ を考えたとき，十分小さな $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$ について，$F : S^{m-1} \times I \to S^{m-1}$ を $F(x,t) = \overline{v}_{(1-t)\varepsilon' + t\varepsilon}(x)$ とすれば，$\bar{v}_\varepsilon \simeq \bar{v}'_\varepsilon$ を与える可微分ホモトピーを与えるような気がするのですが如何でしょうか？

答． 良いアイディアですね．その通りです．ここで，$x \in S^{m-1}_\varepsilon(x_0)$ に対して $\|v(x)\| \neq 0$ であることに注意しておきましょう．

問． Euler 標数について簡単でよいので説明してほしいです．

答． 正４面体の表面を想像してください．これは球面 S^2 と同相です．頂点の個数は 4 です．辺の個数は 6 ですね．面の個数は 4 です．このオイラー標数は，$4 - 6 + 4 = 2$ と計算されます．これが位相不変量であることを見るためには，やはりホモロジー群を導入するのが良い方法なので，詳しくは，幾何学４の講義内容を復習してください．

問． Euler 標数は，それぞれの多様体にとってどのような意味をもつのですか？オイラー標数を求めることのメリットはどんなところですか？

答． 典型的な応用例は,「正多面体の分類」でしょう．

問．「プラトンの正多面体の分類」とはどういったものなのでしょうか？

答．有名な話なので，書いてある本を見つけるのは簡単だと思います．たとえば数学教育関係の幾何学の本には書いてあります．あるいは，たぶん友達が知っていると思うので聞いてみてください．ともかく，ぜひ今のうちに，自分で調べておくことを強くお勧めします．

問．$\mathrm{rank} H_i(M; \mathbf{Z})$ とは何ですか？

答．ホモロジー群 $H_i(M; \mathbf{Z})$ は有限生成アーベル群ですが，その rank です．ところで，有限生成アーベル群については群論の授業ですでに習っていると思いますが，ここでもう一度復習しておくと，任意の有限生成アーベル群 G は $G \cong G_{free} \oplus G_{torsion}$ という形に一意的に直和分解されます．ここで，G_{free} は自由アーベル群で，$\mathbf{Z}^r$ という形のアーベル群と同型です．$G_{torsion}$ は有限アーベル群です．$\mathbf{Z}^r$ の r は群の同型写像で不変なので意味を持ち，これを有限生成アーベル群 G の**階数** (rank) と呼びます．ちなみにホモロジー群の階数を**ベッチ数**とよびます．ベッチ (Betti) は数学者の名前です．

問．$\mathrm{rank} H_m(S^m; \mathbf{Z}) = 1$ となると思いますが，これは何故でしょう？

答．$H_m(S^m; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ であり，$\mathrm{rank}(\mathbf{Z}) = 1$ だからです．

問．ホモロジー群とはどういったものだったでしょうか？

答．詳しくは，幾何学４の講義を聞いてもらうことにして (ところで，この幾何学５の講義は，幾何学１，２，３，４すべてを前提にしています)，ここでは，ひどく簡単にホモロジー群を無理を承知で説明しましょう．単体が鎖のようにいくつかつながったものを**チェイン**，境界のないチェインを**サイクル**とよびます．たとえば，円周や境界のない閉曲面はサイクルです．i 次元ホモロジー群 $H_i(M; \mathbf{Z})$ は，i 次元のサイクルの全体を，２つのサイクルの差が，$(i+1)$ 次元チェインの境界になっているという同値関係で割って得られる群です．それ自身は境界ではなくても，何倍かしたら境界になってしまうようなチェインがある，という奇妙 (微妙) なことも起きるのですが，それはともかく，だいたい，独立な i 次元サイクルが最大いくつ M の中に含まれるかを表すのが，$\mathrm{rank} H_i(M : Z)$ と言えます．

問．$H_i(S^m; \mathbf{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & i = 0, m \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$ となるのは何故でしょうか？

答．ここで，初歩から説明するのは不可能なので，直前の質問の回答を参考にして幾何学４の講義内容の復習をしてください．悪しからず．

問．Euler 標数は境界がある多様体でも定義されるのですか？

答．定義されます．たとえば，$M = D^m$ (m 次元ディスク) なら，$H_0(D^m; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, $H_i(D^m; \mathbf{Z}) = 0 (i \neq 0)$ なので，$\chi(D^m) = 1$ です．

問．Euler 標数と ind のどちらが本質的なのですか？Euler 標数と ind のどちらが元の多様体の性質を表していると言えますか？

答．どちらも本質的です．ただし，Euler 標数は多様体の性質を表していますが，ind はベクトル場の零点の近くでの性質を表しています．

問．$\chi(M) =$(点の個数)$-$(辺の個数)$+$(面の個数)$- \cdots$ という式はなぜ，どのようにしてでてきたのでしょうか？Euler 標数の定義である $\chi(M) := \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \mathrm{rank} H_i(M; \mathbf{Z})$ ということから導かれたのでしょうか？

答．導かれます．ただし，なぜ導かれるかを説明するためには，ホモロジー群の定義にさかのぼらなければなりません．M を単体分割して，その i 次元単体が生成する自由アーベル群を $C_i(M)$ を書きましょう．このとき，(i 次元単体の個数) $= \mathrm{rank} C_i(M)$ です．さて，ホモロジー群とは，境界作用素 ∂ からできる複体 (complex) $\cdots \to C_2(M) \to C_1(M) \to C_0(M) \to \cdots 0$ のホモロジー群のことですが，そのホモロジー群 $H_i(M; \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\partial_i : C_i(M) \to C_{i-1}(M))/\mathrm{Im}(\partial_{i+1} : C_{i+1}(M) \to C_i(M))$ に関して，$\sum (-1)^i \mathrm{rank} H_i(M; \mathbf{Z}) = \sum (-1)^i \mathrm{rank} C_i(M)$ が成り立つことが証明できるからです．(詳しくはホモロジー群の教科書を参照)．

問．講義では，$\chi(M) =$(点の個数)$-$(辺の個数)$+$(面の個数)$- \cdots$ と書かれていて，あとは次元が大きくなると続くということだったですが，有限次元ならばわかるような気がするのですが，無限次元になると，この式は何を表すことになるのですか？ひょうとして定義されませんか？

答．良い質問ですね．一般には定義されません．

問．φ_* の意味がわかりません．$(\varphi_*) \circ v \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbf{R}^m$ は V 上のベクトル場となる，ということをやりましたが，$\varphi : U \to V$ ということから，$\varphi^{-1} : V \to U$ で V 上のものを U にもっていくことはわかるのですが，その後，U 上の $v \circ \varphi^{-1}$ を V へもっていくときに，なぜ微分する必要があるのでしょうか？できれば図を用いて説明してください．式だとどうも写像のイメージが浮かばないのでお願いします．

答．図を書くのは，時間の都合でできないし，講義中にすでに書いているので，ここでは許してもらって，式もなるべく使わないで言葉で説明します．質問は良い点をついていますが，まず写像として，$v : U \to \mathbf{R}^k$ なので，$v \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbf{R}^k$ に注意しましょう．でも，$V \subset \mathbf{R}^m$ なので，V 上のベクトル場とみなすためには，もう１段階必要なわけです．U の接ベクトル (k 次元ベクトル) を V の接ベクトル (m 次元ベクトル) に変えなくてはいけません．どうすればよいでしょうか？ここで，接ベクトル空間 $T_{x_0} M = T_{x_0} U$ と $T_{\varphi(x_0)} V = T_{\varphi(x_0)} \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m$ の間の同型写像は微分写像 φ_* で与えられたことを思い出しましょう．(復習ポイント：局所座標系，接空間 (多様体論の基礎))．**写像は曲がっている (非線形) ので，微分することによってベクトルの変換を作る**のです．

問． φ を $x_0 \in M$ のまわりの local chart としたとき，chart のとり方によらず ind がきまるのはなぜですか？「別の局所座標系 $\varphi' : U' \to V' \subset \mathbf{R}^m$ について，$\mathrm{ind}_{\varphi'(x_0)}\{(\varphi'_*) \circ v \circ \varphi'^{-1}\} = \mathrm{ind}_{\varphi(x_0)}\{(\varphi_*) \circ v \circ \varphi^{-1}\}$ が成立するので，座標系のとり方によらずに *ind* が定まる」とありましたが，この式が成立することの証明のやり方を教えてください．

答． やり方を説明しましょう．$f = \varphi^{-1} \circ \varphi', \varphi(x_0) = z_0, \varphi'(x_0) = z'_0, w = (\varphi_*) \circ v \circ \varphi^{-1}$ に次の補題を適用します：「$f : V \to V'$ を $\mathbf{R}^m$ の開集合 V, V' の間の微分同相写像で，$f(z_0) = z'_0$ とし，w を V 上の可微分ベクトル場としたとき，$\mathrm{ind}_{z'_0}\{(f_*) \circ w \circ f^{-1}\} = \mathrm{ind}_{z_0} w$ が成り立つ」この補題は，$z_0 = 0 = z'_0$ の場合に証明すれば十分ですが，まず，f が向きを保つ場合には，f と恒等写像の間の可微分アイソトピーをつかって，$\bar{w}$ と $\bar{w'}$ (ただし，$w' = (f_*) \circ w \circ f^{-1}$) の間の可微分ホモトピーを構成することにより証明します．f が向きを保たない場合は，１つの反転 (鏡映) によって ind が不変であることを確かめて，あとは，f が向きを保つ場合に帰着します．

問． 球面と立方体は同相なのですか？オイラー標数を計算すると，球面の場合 $\chi = 0 - 0 + 1 = 1$, 立方体の場合 $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$, さらに，４面体の場合 $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$, 円柱の場合 $\chi = 0 - 2 + 3 = 1$ などとなってしまいます．

答． 同相です．注意してほしいのは，オイラー標数の計算は，あくまで単体分割 (simplicial decomposition) して計算するということです．つまり，球面のままではだめで，たとえば，赤道で分けて，その赤道も２つの弧に分けなければなりません．すると，オイラー数は 2 になるはずです．ただし，実は単体分割では計算が複雑になるので，もっと簡単に**胞体分割** (cell decompositon) を使って計算する方法があります．胞体とは，D^m と同相なものを指します．球面なら，球面に１点をとるだけで胞体分割されます．このとき，オイラー標数は，$1 - 0 + 1 = 2$ と計算されます．なお，円柱については，側面の筒の部分を線分で分ければ胞体分割になります．$(2 - 3 + 3 = 2)$.

問． 別の授業でもポアンカレの定理が出てきました：「D：単連結領域 $(\subset \mathbf{R}^n (n = 2 \text{ or } 3)$, $F \in C^1(D, \mathbf{R}^n)$ ベクトル場，$\mathrm{rot} F = 0 \Rightarrow \exists \varphi \in C^2(D)$ s.t. $F = \mathrm{grad}\varphi$.」これは，この講義のポアンカレと関係ありますか？

答． 同一人物によって発見された違う定理です．ところで，上の定理は一般の n でも成り立ちます．

問． 授業にガウス写像が出てきましたが，これとガウス関数と何か関係があるのでしょうか？

答． ガウス関数とはなんですか？もし，$[x]$：x を超えない最大の整数，のことなら，もちろん関係ないですね．同じ Gauss が発見した，という以外の関係はないです．

問． 立体の体積を求めるのに，錐体は柱体 $\times \dfrac{1}{3}$ となりますが，どうやって $\dfrac{1}{3}$ と求めたのでしょうか？(特に昔の人は).

答． 昔のことは知りませんが，錐を薄くスライスして，同じ底面で同じ高さなら，同じ体積であることを納得して，柱体を同じ体積の３つの錐に分けられることを見ればよいと思います．三角形の面積が (底辺)×(高さ)$\times \dfrac{1}{2}$ となることを説明するのと一緒ですね．

問． 質問書に「今まで習ったものが１つに集中しているのが多様体」とありますが，確かに，この講義を受けていると，分野に限らず，今まで聞いたことがあるものがポンポン出てきます．でも実は，そのたびに，あっ，聞いたことはあるんだけど，何だっけ？と困惑する自分にも出会ってしまいます．

答． **数学は総合芸術**なので当然ですね．

問． どうしたら具体的で直観的な発想が身につくのですか？

答． 具体例を良く調べるとよいです．

問． 僕は，数学に出てくる定理というものは，それ自体，単体であるような気がして，どんなことと結びついているのか，それを理解して何に発展するのか，と深く考えれば考えるほど，意義がわからなくなってしまうのです．

答． 定理というのは単独では存在し得ません．他の定理や理論との関係において重要性が決まるものだと思います．ところで，わからなくなる，というのは，実な，真の理解に近づいているということだと思います．体力をつけてもっと深くもっと広く考え続けることをお勧めします．

問． ヴィダルサスーンの CM で講義風景みたいなものがあったのですが，数学の様な気がするのですが，何だと思いますか？

答． 知りません．もし数学だとすると，**数学の講義は退屈であるという偏見**に基づいている CM でしょうね．こまった事です．

問． テストがありますが，前のようにノート持ち込みは良いのですか？また，ノートを見てだいたい解けるような level の問題がでるのですか？テスト範囲はどれくらいですか？

答．小テストは持ち込み自由，カンニング禁止です．だいたい解けるかどうかは，皆さんの勉強の具合によるので，何とも答えられませんが，とにかくノートや回答書を良く読んでおいてください．テスト範囲は，前回の小テスト以降の内容です．

４年生のみなさんへ：成績の事務処理の都合上，４年生の成績は，今日の質問書の内容までで付けることになりました．申し訳ありません．(この件は，成績集計の電算化に起因しているのですが，電算化して便利になることも多い反面，不便になることも生じるのですね．) そこで，来週の２回目の小テストの成績は，一応，４年生は全員 B の成績をとったとみなして集計させていただきます．ただし，成績の変更も可能なので，４年生のみなさんも小テストを受験されることをお勧めします．もし，B より良い成績なら良い方に変更するし，万一 C 以下でも，悪い方への変更はしないことを約束します．なお成績は絶対評価です．ではまた来週．