幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １０ (２００２年１月１７日) の分

問． S^n 上のベクトル場の零になる点の個数と，n の値について，何かわかっていることはありますか？やはり，零になる点の個数はランダムに (無制限に) 存在すると考えるべきですか？(間違っているかもしれないけれど) 零点の個数というものは，一定の規則みたいなものはあるのですか？

答． こんにちは．出張で函館に行って来ました．函館ビールを飲んできました．さて回答ですが，よい質問ですね．わかっていることがあります．規則 (制約) があります．間違っていませんが，正確には，零点の個数ではなく,「零点の指数 (index) の和」が一定である，という制約です．ベクトル場の零点の指数の和は，個々のベクトル場にはよらずに，多様体にだけ依存する，という制約です．S^n の場合，n が奇数なら，零点のまったく無いベクトル場が存在する (Brouwer の定理) ので，零点の指数の和は 0 です．n が偶数なら，零点の指数の和は 2 になります．実は，零点の指数の和は，多様体のオイラー標数 (Euler characteristic) と呼ばれる数に等しくなります (Poincaré-Hopf の定理)．講義でこれから説明します．

問． Brouwer の定理「S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在する $\Leftrightarrow$ n が奇数」の成り立たない例が知りたいです．n が奇数なら，S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在することは分かりましたが，では，n が偶数なら必ずしも成り立たないと思ったので，自分なりになぜ成り立たないのかを考えてたのですが，どうしても理解できませんでした．なぜ，n が偶数なら成立しないのでしょうか？

答． Brouwer の定理は正しい定理なので，反例はありません．質問の真意は，n が偶数の場合,「S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在しない」ということをどうやって証明するか，という点だと思いますが，それがまさに，講義で詳しく証明したことです．(「存在する $\Rightarrow$ n が奇数」が成り立つので，もちろん，n が偶数 $\Rightarrow$ 存在しない」も成り立ちます．)

問． n が偶数のとき，S^n の可微分ベクトル場はどうなるのでしょうか？「ベクトル場が存在しない」となるのか,「存在するとは限らない」となるのか，どちらなのでしょうか？

答． 単純に「存在しない」です．どの多様体上にもベクトル場はたくさん存在するのですが，n が偶数のとき，S^n 上には，どの点でも零にならないような可微分ベクトル場は存在しないということです．Brouwer の定理は，任意の自然数 n に対して，２つの条件，条件「S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在する」と条件「n が奇数」が同値 (等価) である，つまり，真偽を共にする，ということを意味しています．したがって，それぞれの条件の否定をとれば，各 n について，条件「S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在しない」と条件「n が偶数」も同値であることも同時に意味しています．各 n について，S^n 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場が存在するか，そのようなベクトル場は存在しないか，のどちらかしか可能性がありませんから,「存在するとは限らない」，つまり，存在するかもしれないし，存在しないかもしれない，ということは何も主張していないことになってしまいますね．わかりましたか？

問． 幾何学５の授業では，ベクトル場の様子を調べる為にベクトル場の安定・不安定の理論には触れないのですか？多様体と微分方程式に何らかの関係があるのですか？

答． この講義では触れませんが，多様体と微分方程式には大いに関係があります．(この講義でも，すでに積分曲線については言及しました)．

問． Brouwer の定理のすぐ下にベクトル場を書いてありました．どういう向きのベクトル場かは決まっているのですか？なぜ，こういうベクトル場になるとわかるのですか？

答． 決まりません．あくまで１つの具体例です．定理に対する理解を助けるための例です．

問． 積分曲線とベクトル場の関係がよくわかりません．黒板に書いたものが零にならない可微分ベクトル場であることもわかりませんでした．

答． $n = 2$ のときは，零になるベクトル場を図示しました．

問． 定理の証明でやった，$n = 2k - 1$ の時の可微分ベクトル場がなぜこうなるのかわかりません．また，これは必ずこうなる (つまり一意) なのでしょうか？

答． あくまで１つの具体例です．存在を証明するには，条件をみたす１つ例を挙げればよいので，いわゆる１つの例を挙げたわけです．ベクトル場というものは，もちろんたくさんあります．

問． 講義の定理の証明の中で，$\dfrac{1}{\|v(x)\|}v(x)$ を考えると，はじめから $\|v(x)\| = 1$ としてよい，とありましたが，それはなぜでしょうか？

答． 手間を惜しんで記号を変えなかったからわかりづらかったかもしれませんが，数学の本ではよく使う論法なのです．つまり，初めに与えられたベクトル場 $v(x)$ から，新しいベクトル場 $w(x) = \dfrac{1}{\|v(x)\|}v(x)$ が構成でき，$\|w(x)\| = 1$ をみたす．つまり，長さが 1 のベクトル場の存在が言える．だから，与えられたベクトル場 $v(x)$ の長さが 1 として，議論を続けてもよい，という論法です．

問． n が奇数 $(2k - 1) \Rightarrow S^n$ 上にどの点でも零にならない可微分ベクトル場がある，というところで，証明する際，$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2k}, x_{2k-1})$ で証明が片付けられてしまいましたが，$v(x)$ がこのようになっているのはなぜですか？

答． こうなる，ということではなく，この式で，ベクトル場の１つの例を定めたということです．

問． $v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2k}, x_{2k-1})$ とおいたのは，$v(x) \cdot x = x_1x_2 - x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_4 + \cdots + x_{2k}x_{2k-1} - x_{2k}x_{2k-1} = 0$ となるからでよいのですね．

答． そうです．接ベクトル場の条件をみたしています．

問． Brouwer の定理の条件で，ベクトル場が可微分とあるのは何故ですか？証明を見る限り，"可微分"であることを使っていないように見えました．

答． 使っています．どこに使っているかというと，ホモトピー $F(x,t)$ が可微分である，という部分に使っています．そして，写像度は可微分ホモトピックという同値関係について不変である，ということを使っています．ところで，実は「S^n 上にどの点でも零にならない**連続**ベクトル場が存在する $\Leftrightarrow$ n が奇数」ということも成立します．実は，写像度は (連続的に) ホモトピックという同値関係についても不変であることが証明できるからです．

問． 今日説明された Brouwer の定理と,「Brouwer の不動点定理」($f : D^n \to D^n$ 連続に対し，$\exists x \in D^n$ s.t. $f(x) = x$) とは関連があるのでしょうか？

答． あまり関連はなさそうですね．でも，これから説明する「Poincaré-Hopf の定理」と「Brouwer の不動点定理」は関連があると思います．というのは，$f : D^n \to D^n$ が可微分で，不動点をもたないとすると，D^n 上に零点のないベクトル場 $v(x) := x - f(x)$ (境界では常に外向き) が定まり，Poincaré-Hopf の定理に矛盾します．したがって，よく考えると，Poincaré-Hopf の定理から Brouwer の不動点定理を導くことができますね．

問． 写像度を用いて可微分ホモトピックを導けることはありますか？定理「$f \cong g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$」の逆を，何か条件を付け加えることで言うことはできたりしますか？

答． 一般には難しいですね．でも，f と g が S^n から S^n への可微分写像の場合に限れば，逆が成立することが証明できます．時間が許せば，講義で説明したいと思っております．

問． 写像度の具体的 (図形的) な意味は何なのですか？以前にも，幾何学４で，連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対し，$f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$, $f_*(u) = ku (u \in H_n(S^n))$ をみたす係数 k が存在する．この k を f の写像度とよぶ，とやりましたが，わかりません．

答． 良い質問ですね．同じものです．この講義で説明していることが，写像度の具体的な意味，ということになります．つまり，正則値の逆像の上で，いくつの点で向きを保ち，いくつの点で向きを保っていないか，その個数の差を表す整数です．

問． 写像度というものには，$\pm$ の自由度があると思うのですが．$\mathrm{sign}(f_*)_{x_0}$ というのは，M, N の向きづけに依存する気がします．

答． そうです．向きづけに依存します．したがって，写像度は,「向きづけられた」多様体，すなわち，あらかじめ向きが指定された多様体の間の写像に対して定義されます．ですから，符号もきちんと定まります．

問．「$u_1, u_2, \dots, u_n$ は $\tilde{a}$ により $\tilde{a}_* u_1, a_* u_2, \dots, a_* u_n$ にうつる」となっていますが，何を意味しているのでしょうか？$\tilde{a}_* u_2 = a_* u_2, \dots, \tilde{a}_* u_n = a_* u_n$ となっているのでしょうか？

答． そうです．$\tilde{a} : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ を S^n に制限したものが a であり，u_2 以下は，S^n に接するように選んでいるので，$\tilde{a}_* u_2$ は $a_* u_2$ と書いてよいわけです．

問．「$u_1, u_2, \dots, u_n$ は $\tilde{a}$ により $\tilde{a}_* u_1, a_* u_2, \dots, a_* u_n$ にうつる」とありますが，これは，$\tilde{a}_* u_1, \tilde{a}_* u_2, \dots, \tilde{a}_* u_n$ と表現するのはダメなのですか？

答． ダメではなくて，まったく正しいです．

問．「$\tilde{a} : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ が向きを保つ $\Leftrightarrow$ $a : S^n \to S^n$ が向きを保つ」の部分について,「$u_1, u_2, \dots, u_n$ は $\tilde{a}$ により $\tilde{a}_* u_1, a_* u_2, \dots, a_* u_n$ にうつる」の部分まではわかったのですが，その後の説明がわからなかったので，もう一度詳しく説明をお願いします．

答． まず，基礎として，球面の向きづけについて復習しましょう．$S^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は $D^{n+1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq 1\}$ の境界ですが，境界の向きは，D^{n+1} の標準的な向きと，球面の外向きベクトルを考えると決まりましたね．球面の各点 x_0 について，$T_{x_0} D^{n+1} = T_{x_0} \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n+1}$ は $\langle u_1 \rangle \oplus T_{x_0} S^n$ と直和分解されます．ここで，u_1 は S^n に接していなければよいのですが，特に外向きベクトルに取っておきます．すると，球面の接空間 $T_{x_0} S^n$ の向きは，基底 $u_2, \dots u_{n+1}$ を指定すれば決まるわけですが，それが正の向きと言うのは，$\mathbf{R}^{n+1}$ の基底 $u_1, u_2, \dots u_{n+1}$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ の正の向き，すなわち，標準的な向きを決める，つまり，$n+1$ 次行列式 $|u_1, u_2, \dots u_{n+1}|$ が正のときに言うと決めたわけです．(講義ノート「境界の向き」参照)．基礎はここまでにして，そこで，$a : S^n \to S^n$ が向きを保つかどうか，つまり，各点 $x_0 \in S^n$ について $a_* : T_{x_0} S^n \to T_{x_0} S^n$ が向きを保つかどうか，を調べるわけですが，$\tilde{a}$ は外向きベクトル u_1 を 外向きベクトル $\tilde{a}_* u_1 = -u_1$ に写すので，$u_2, \dots u_{n+1} \mapsto a_* u_2, \dots, a_* u_n$ が指定された向きに関して，向きを保つかどうかは，$u_1, u_2, \dots, u_n \mapsto \tilde{a}_* u_1, a_* u_2, \dots, a_* u_n$ が標準的な向きに関して，向きを保つかどうかにかかっている，というわけです．わかりましたか？

問． $a : S^n \to S^n$ $(n > 2)$ のときの $\deg(a)$ がよくわかりません．

答． $\tilde{a} : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}, \tilde{a}(x) = -x$ は，球面の外向き法線ベクトルを球面の外向き法線ベクトルに写すので (正確には，その微分写像が写すので，線形写像だから，微分写像も同じ形の写像になるので)，$\tilde{a}$ が向きを保つときは，球面の向きを保つし，$\tilde{a}$ が向きを保たないときは，球面の向きを保たないので，$\deg(a) = \deg(a; y_0) = (-1)^{n+1}$ となります．(a は微分同相写像なので，S^n のどの点 y_0 も a の正則値になり，$a^{-1}(y_0) = \{-y_0\}$ です)．

問． n が偶数のとき，$\deg(a) = -1$ (a は anti-podal map) がよくわかりません．

答． 講義で証明したように，$\deg(a) = (-1)^{n+1}$ なので，n が偶数のとき，$n+1$ は奇数で，$(-1)^{n+1} = -1$ となります．

問． $a_*, \tilde{a}_*$ はどんな写像なのですか？

答． a や $\tilde{a}$ の「微分写像」です．(復習ポイント：微分写像)．

問． $\tilde{a}:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^{n+1}$ を $\tilde{a}(x)=-x$ とすると，この時，微分写像が $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$ とありますが，どうして，-1 なのですか？$\tilde{a}(x_1,\ldots,x_{n+1})=(-x_1,\ldots,-x_n)$ から考えると，$(-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ とも表されるのに，なぜ，$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$ になるのですか？

答． 写像 $a(x)=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_{n+1})$ の微分写像はヤコビ行列で表現されるからです．(復習ポイント：ヤコビ行列)．ちなみに，$(-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ ですね．

問． 写像度の例の最初の $f:S^1\to S^1$ を $f(z)=z^k$ で定義する問題で，$\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ としていますが，そういうことは可能なのでしょうか？

答． 可能です．複素数平面 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{R}^2$ と $z=x+iy\mapsto(x,y)$ という対応によって (可微分多様体として) 同一視されます．

問． TM (M の接束) の次元が M の次元の２倍と今日の講義で聞いた気がしたのですが...

答． そうです．M が m 次元多様体のとき，TM には $2m$ 次元多様体の構造が入ります．たとえば，$M=S^2\subset\mathbf{R}^3$ のとき，$TS^2=\{(x_1,x_2,x_3,v_1,v_2,v_3)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=0\}$ は $\mathbf{R}^6$ の中の 4 次元多様体です．

問． ２次元で考えたとき，向きづけ可能というのは，”図形の裏表を区別できる” ことではないのかと思いました．

答． $\mathbf{R}^3$ の中の曲面に限って言えば，その通りです．$\mathbf{R}^3$ の中の曲面は，局所的に３次元空間を２つの部分に分けますが,「図形の裏表を区別する」ということは，数学的に言うと，その２つ部分の一方を指定する，ということです．(もっと洗練された言い方をすると，法ベクトル空間 (ここでは $3-2=1$ 次元空間) の向きを指定する，ということ)．それが曲面全体で指定できる，ということは，曲面に向きを指定できる，という条件と同値になります．ただし，抽象的に考えられた曲面については，裏表を考えること自体ができません．厚味のまったくない紙を想像して下さい．その「表側」「裏側」を考えるには，その紙が置かれている空間がなければ不可能ですね．

問． ホイットニーの定理について，M : m 次元多様体，N : n 次元多様体として，M は N に埋め込み可能で，$n=2m+1$ とありました．これに従えば，$M=S^2$ としたとき，$N=E^n$ とすれば $n=2\cdot2+1=5$, $N=E^5$ となり，S^2 は E^5 に埋め込み可能となります．しかし，現実には，S^2 は E^3 の中に埋め込まれます．これには，S^2 という多様体の特殊性があるからだと思うのですが，どうなんでしょうか？

答． よい質問ですね．まったくその通りです．実は，m 次元多様体は，$\mathbf{R}^{2m}$ に埋め込むことができる，ということまではわかっています．(これもホイットニーによる定理)．ですから，たとえば２次元多様体 (つまり曲面) なら，$\mathbf{R}^4$ に埋め込むことができます．でも，向きづけ不可能な閉曲面，たとえば，射影平面 $\mathbf{R}P^2$ やクラインの壷は，$\mathbf{R}^3$ に埋め込むことはできません．(不可能であることが証明できます)．しかし，S^2 やトーラスなどの向きづけ可能な曲面は御存じのように，$\mathbf{R}^3$ に埋め込むことができます．まさに,「向きづけ可能」という特殊性が反映されているわけですね．(ところで，質問にあるように，n 次元ユークリッド空間は E^n と表すこともよくあります)．

問． 最近，他でも多様体を学んでいますが，結局，今まで習ったものが１つに集中している概念が多様体なのか，とうすうす感じることもあります．微積分を行う場を定義したりやっていく中ですばらしいと思う反面，抽象的でとっつきにくい所もあったりしますが，多様体の抽象概念を学ぶことで，以前の例えば線形代数のもつ性質が幾何的に理解されたり，プラスの作用がかなりこめられていると思います．先生はどのように考えていますか？

答． 私 (石川) もまったくその通りだと思います．

問． 就職活動，セミナーなどで授業に出られないと質問書がかけません．このようなときは評価はどうなるのでしょうか？

答． 評価は下がるでしょう．ところで，前回の回答にある,「向きづけ」に関する「かべ」と「かべ紙」のたとえはわかりやすかったです．という感想をもらいました．でも，あまり良いたとえではなかったかも知れません．向きづけ可能な多様体を「時計を掛けられる壁」にたとえ，向きづけは，”右回り”の時計を掛けるか，”左回り”の (理髪点用の) 時計を掛けるということ，というたとえはどうでしょうか．それから,「数覚」とはどういう感覚かについてどう思いますか？以前の回答書で「数学では論理よりむしろ数覚が大事」と書かれていて，ボク自身も前からその言葉を知っていたのですが，どうもその語感がわからないでいました．ところが，冬休みの間読んでいた本に「数覚はある種のピッタリ感じゃないか」と書かれたいました．その本では，例として完全列がピッタリ感の例として書かれていましたが，先生は「数覚 = ピッタリ感」説をどう思いますか？という質問をもらいました．なるほど，そうかも知れませんね．でも，完全列の例はよくわかりません．私 (石川) なら，たとえば,「プラトンの正多面体の分類がおもしろい，と思えるかどうか」というのが数覚であると説明するかもしれません．ではまた．