幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １ (２００１年１０月１１日) の分

問． 写像度の定義 $\deg(f) = \sum_{f^{-1}(y)} \pm 1$ がわかりません．

答． こんにちは．北大のキャンパスの紅葉はきれいですね．とくに北１２条のイチョウ並木はこれからの時期が見ごろです．さて回答ですが，講義で説明し忘れました．最近物忘れが多くてこまります．まあ，むかしから忘れっぽいですけど．ここで説明しておきましょう．$f^{-1}(y)$ は，点 $y \in N$ の写像 $f : M \to N$ に関する**逆像**を意味しています．ですから，正則点 y に写る点すべてについて，そこで f が向きを保てば $+1$，向きを逆にすれば -1 として，それらを逆像 $f^{-1}(y)$ 上の点で総和する，という意味です．具体例で説明しましょう．写像 $f : S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \to S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を $f(z) = z^2, (z \in \mathbf{C}), f(\infty) = \infty$ で定めましょう．このとき，$y = 1$ は正則値です．(実は，$0, \infty$ 以外はすべて正則値です)．実際，$f^{-1}(1) = \{1, -1\}$ で，$z = 1, z = -1$ は正則点です．$(u + iv)^2 = u^2 - v^2 + i(2uv)$ だから，f を局所座標で表せば，$(u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv)$ ですね．ヤコビ行列は，$\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$ であり，$u = 0, v = 0$ の場合以外は，行列式は正になります．つまり向きを保つ．だから，写像度は，$+1$ が２つで，２となります．(復習ポイント：逆像の定義，行列式)．

問． 写像度は何を表しているのですか？

答． 写像度は，写像に対して決まる数であることに注意しましょう．その写像の，ある種の本質的な複雑の度合いを表しています．

問． 写像度は何に利用されるのでしょうか？

答． いろいろ利用されます．たとえば不動点定理に応用します．この講義で説明する予定です．

問． 「向きづけ可能」とはどういうことですか？

答． 接空間の向きを連続的に全体にいっせいに決めることができる，ということです．

問． 接空間の向きが "連続的に" 定まるとは，どういう事を意味するのですか？

答． M (n 次元多様体とします) が向きづけ可能であるということの厳密な定義は以下のようになります：「各点 $\tilde{x} \in M$ に対し，$T_{\tilde{x}}M$ の向きを指定し，任意の $x \in M$ に対し，x の M における開近傍 U 上の連続的ベクトル場 $X_1, \ldots, X_n$ を選んで，各 $\tilde{x} \in U$ に対して，$X_1(\tilde{x}), \ldots, X_n(\tilde{x})$ が $T_{\tilde{x}}M$ に指定された向きと同じ向きを定める」．難しいですね．でもこの講義に５ヶ月間参加していれば，なるほど，そういうことか，という具合に理解できるようになること請け合いです．

問． 向きづけ可能の定義として「滑らかな曲面 M について，$\forall x \in M, \exists \varepsilon > 0$ such that $y \in B(x; \varepsilon)$ (x の ε 開近傍) ならば x の basis と y の basis は同じ向きを定める」で良いのでしょうか？

答． おしいですね．前半はだいぶ良いですが，定義の後半部分の意味がはっきりしていませんね．たとえば，次のように直せば OK です：「滑らかな曲面 M について，$\forall x \in M, \exists T_xM$ の向きが与えられ，次の条件をみたす：$\forall x \in M, \exists \varepsilon > 0, \exists X_1, X_2$ $B(x; \varepsilon)$ 上の連続ベクトル場 such that $y \in B(x; \varepsilon)$ ならば $X_1(y), X_2(y)$ は T_yM に指定された向きを与える」．

問． 向きづけが可能か不可能かは，どうやって見分けるんですか？

答． 定義にしたがって見分けます．でも，とりあえず大体の雰囲気が分ければ十分です．曲面の場合，向きづけ不可能であることは，メビウスの帯を含むかどうかで判定できることが知られています．

問． 向きづけ不可能だと，どのような点で困るのですか？

答． 困るといってみても，向きづけ不可能なものも大事な仲間なので仕方ありません．たとえば，写像度が整数として定義できなくなるなどの不都合がありますが，なんとかなります．

問． 射影平面は，向きづけ可能ですか，不可能ですか？

答． 向きづけ不可能です．

問． クラインボトルでも部分的には向きづけ可能だと思うのですが，いかがなものでしょうか？

答． その通りです．これは大事な指摘ですね．向きづけ可能かどうかは大域的 (global) な条件なわけです．

問． 講義で，２つの基底が同じ向きを定めるとは，$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)A$ と表したとき $\det(A) > 0$ と定義しましたが，これは１次変換と関係のあることなのですか？

答． もちろん関係があります．１次変換とは線形変換の別名であり，すでに大学１年のとき，線形代数でお馴染みですね．(ところで，**講義の板書で，A の位置が変でしたね**．失礼しました．)

問． $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$ について，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ はどこから来るのですか？

答． $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 = 0\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 = 1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2$ という具合に１次結合で表されるので，まとめると $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と表されますね．

問． 「向きづけ可能」の定義を，"任意の座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ に対して，$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ の微分の行列式が正" としていたところもあった気がしますが．

答． そのような座標近傍系が存在するという定義ですね．このような定義もあります．そして，これは講義で述べた定義と同値な定義になります．本当に同値な定義かどうか，考えてみることをお勧めします．

問． 「向き付けられた」ということについて何の説明もなかった気がします．

答． はい説明しませんでした．説明を省略しました．接空間に向きをいっせいに連続的に与えた，という意味です．

問． 接空間とは何ですか？

答． 曲面に一番接している平面のことです．あるいは，それを多様体に対し一般化したものです．これから講義で説明します．(復習ポイント：微分積分のうちの偏微分のところで習った接平面の方程式)．

問． メビウスの帯以外で向きづけ不可能かつ３次元で作れるものはあるのでしょうか？

答． たとえば，メビウスの帯の境界に長方形の２辺を取っ手のように付けてできる曲面も向きづけ不可能ですね．(図に書けばすぐわかるのですが)．

問． クラインボトルは向きづけ可能ではないので，写像度を定めることはできないのですか？

答． その通りです．ただし，向きづけ不可能な場合でも，「２を法とした写像度」というもの (つまり，偶数か奇数か) は定まります．講義で説明します．

問． 「正則点」とは何ですか？

答． 可微分写像 $f : M \to N$ に対して，点 $x \in M$ が正則点かそうでないかが決まります．さて，$x \in M$ が**正則点** (regular point) とは，微分写像 $(f_*)_x : T_xM \to T_yN$ ($y = f(x)$ の階数が T_yN の次元に等しい場合 (言い換えれば，$(f_*)_x$ が全射の場合) に言います．微分写像は，線形写像で，$\dim(T_xM) = m, \dim(T_yN) = n$ とおくとき，$n \times m$ の行列 (ヤコビ行列) で表現されます．

問． 微分写像 $(f_*)_x$ の階数とは何ですか？行列の階数ということですか？

答． その通りです．(復習ポイント：階数)．

問． ほとんどの点とは，例外があるということでしょうか？

答． その通りです．あとで紹介するサードの定理にかかわる内容です．この場合，ほとんどの点とは，測度 0 の集合 (例外の集合) をのぞいて，という意味です．

問． $f : M \to N$ の写像度のところで，M をコンパクトにした理由は？

答． 正則値の逆像が有限集合になるということです．有限集合でないと，総和をとるという意味があいまいになるからです．ここで，どうして有限集合になるかというと，($\dim M = \dim N$ の場合) 正則値の逆像の各点は，M の中で孤立しているからです．コンパクト空間の中の孤立点からなる集合は有限集合です．(なぜでしょう？) (復習ポイント：コンパクト，孤立点)．

問． 逆像が有限集合でない場合の写像度の定義について何か試みがなされているのでしょうか？

答． 同じ次元の向き付けられた多様体の間の写像の場合は，定義域のコンパクト性を仮定すれば，正則値の逆像は有限集合になるから良いわけですが，次元が違う多様体の間の写像では，そうはいかないのですが，その場合の Pontryagin 構成というものを紹介する予定です．(ミルナーの本の目次参照)．

問． 写像度の性質の「ホモトピー不変量」というのがよくわかりません．

答． 写像 $f : M \to N$ と $g : M \to N$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，f と g を結ぶホモトピー (homotopy)，すなわち，連続写像 $H : M \times [0, 1] \to N$ で，$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となるものが存在するときに言います．写像度がホモトピー不変量であるというのは，f と g がホモトピックならば，$\deg(f) = \deg(g)$ となる，という意味です．

問． manifold と variety の使い分けはなぜされているのですか？いままで見てきた本には可微分多様体に対しては manifold を用いて，代数多様体に対しては variety を用いていたのですが．

答． 通常，特異点のある場合に variety と言い，特異点のない場合に manifold と言います．ですから，algebraic manifold という表現も成立します．ところで，フランス語では， manifold という意味でも，variété という単語を使います．不思議ですね．

問． 「$f : U \to V \subseteq \mathbf{R}^\ell$ が可微分」の定義のところの，$f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ は U 上で C^∞ 級ですか， V 上ですか？

答． 各 $f_i : U \to \mathbf{R}$ なので，当然 U 上で考えます．V 上では意味をなしませんね．

問． 距離の定義が変わると，位相も変わるのですか？

答． 変わりえます．つまり，変わることもあるし変わらないこともあります．たとえば，$\mathbf{R}$ 上の距離 $d_1(x, y) := 2|x-y|$ を考えると，これは，通常のユークリッド距離とは違いますが，定める位相は同じです．(**位相を定めることは，開集合系を定めることだ**ということを思い出しましょう)．でも，違う距離 $d_2(x, y) := 1 (x \neq y), d_2(x, x) = 0$ (個人主義の世界) は，いわゆる「離散位相」を定めますね．

問． 岩波の数学辞典は買った方がよいですか？

答． もちろん持っていたほうがよいには決まっていますが，かなり高度な内容まで載っているので，十分に使いこなすようになるのは，たとえば大学院に入ったあとぐらいだと思います．しばらくは，必要なときに図書室にあるものを借りればよいと思います．(数学辞典の改訂作業が始まるという話もあるし)．

問． 講究の扱いは？

答． 講義と一体です．

問． レポートはないのでしょうか？

答． この講義はアドバンスド・コース (advanced course) なので，今回は毎回のレポートは用意していません．ただし，初回に配付したプリントの演習問題 (英文，１７題) を考えてみて，そのうちの１題でも，もしも解けたらレポートとして提出してください．講義期間中いつでも受け付けています．レポートを提出しないからといって問題はありませんが，内容のよいレポートを提出したらもちろん悪いようにはしません．ところで，この講義を受けた機会 (記念) に，**微分積分や線形代数の教科書をもう一度読み直してみる**ことを皆さんにぜひお勧めします．たぶん，大学１年生として読んだときとは違った理解の仕方ができます．内容が簡単に思える部分も多くなると思います．以前わからなかったところが，今はわかるようになっているかもしれません．皆さんの成長の度合いが自分で確認できます．絶対有益です．ではまた．