

微分積分学 III (微分方程式入門) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 8 (2002年7月5日) の分

問. $x = x_0$ における初期条件 $\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす解を $\mathbf{u}^{(1)}(x)$, $\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす解を $\mathbf{u}^{(2)}(x)$ とするとき, 任意の解 $\mathbf{u}(x)$ が $\mathbf{u}(x) = c_1\mathbf{u}^{(1)}(x) + c_2\mathbf{u}^{(2)}(x)$ (c_1, c_2 定数) となるのがわかりません. 線形だからですか? // 解の一意性より成り立つというところがわかりづかったです. そもそも解の一意性というのが, いまだによく理解できないのですが.

答. こんにちは. 来週7月19日にテストを行います. 時間は80分, 持ち込み不可です. よく準備しておいてください. また, 7月19日に都合の悪い人は至急私(石川)に連絡してください. さて回答ですが, 線形だからです. まず押さえておくべき点は, $\frac{d\mathbf{u}^{(1)}}{dx}(x) = A(x)\mathbf{u}^{(1)}(x)$ と $\mathbf{u}^{(1)}(x_0) = \mathbf{e}^{(1)}$ が成立していると仮定しているということです. これが, 「初期条件を満たす解」という意味です. 同様に, $\frac{d\mathbf{u}^{(2)}}{dx}(x) = A(x)\mathbf{u}^{(2)}(x)$ と $\mathbf{u}^{(2)}(x_0) = \mathbf{e}^{(2)}$ が成立していると仮定しています. そして, 任意の解 $\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dx}(x) = A(x)\mathbf{u}(x)$ が, この2つの解を用いてどう表現されるか, ということを見ている状況です. $c_1 = u_1(x_0), c_2 = u_2(x_0)$ において, $c_1\mathbf{u}^{(1)}(x) + c_2\mathbf{u}^{(2)}(x)$ を考えると, まず, 線形性から, これも1つの解であり, また, $x = x_0$ とおくと, $c_1\mathbf{u}^{(1)}(x_0) + c_2\mathbf{u}^{(2)}(x_0) = c_1\mathbf{e}^{(1)} + c_2\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{pmatrix} = \mathbf{u}(x_0)$ が成り立ちます. つまり, $c_1\mathbf{u}^{(1)}(x) + c_2\mathbf{u}^{(2)}(x)$ も $\mathbf{u}(x)$ も同じ初期条件をもつ解なので, 解の一意性から, 両者が一致するという論法です. 「解に一意性」とは, 「解 \mathbf{u}, \mathbf{v} について $\mathbf{u}(x_0) = \mathbf{v}(x_0) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ 」ということです.

問. 授業の中の, 解の存在と一意性の解説の図の意味がわからなかったです. // 解のグラフがよくわかりません.

答. たとえば, 単独の微分方程式 $\frac{du}{dx} = a(x)u$ の一つの解 $u(x)$ は $x-u$ 平面上に一つの曲線として表されました. その曲線は, $(x, u(x))$ という点たちから成っています. 同様に, 連立微分方程式 $\frac{du_1}{dx} = a(x)u_1 + b(x)u_2, \frac{du_2}{dx} = c(x)u_1 + d(x)u_2$ のひと組の解 $\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$ は $x-u_1-u_2$ 空間上の一つの曲線として表すことができます. その曲線は, $(x, u_1(x), u_2(x))$ という点たちから成っています. その解曲線の図を書きました(書いたつもりです). 「解の存在と一意性」とは, 解曲線たちが, 重なることなく空間を埋め尽くすことを意味します.

問. 教科書の「 $x = x_0$ における初期条件として $\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を課した解」とはどういうことでしょうか? // 日本語がよくわからないのですが, 「~を課した解」とはどういうことでしょうか? // $\mathbf{u}^{(1)}(x), \mathbf{u}^{(2)}(x)$ が連立方程式を満たす, つまり, $\frac{du_{11}}{dx} = au_{11} + bu_{21}$ などが, どこで了解されたのですか?

答. 「~を課す」とは「~という条件を課す」という意味です. 「税を課する = 課税する」というのと同じ使い方です. また, 「解」とは, 与えられた方程式を満たす関数(の組)のことです.

問. $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ は, 解空間をベクトル空間と考え, おおよそ基底のような感じでとらえてよいでしょうか?

答. まったくその通りです.

問. $T(x) = \det \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) \end{pmatrix}$ を微分するという意味がよくわかりません. // 「解の構造」で, $\mathbf{u}^{(1)}(x), \mathbf{u}^{(2)}(x)$ が1次独立であることを証明するところで, 「 $T(x) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u}^{(1)}(x), \mathbf{u}^{(2)}(x)$ は1次独立」が言えるのがわかりません. // なぜ $T(x)$ を調べるのですか?

答. 線形代数で良く知られているように, $\begin{pmatrix} u_{11}(x) \\ u_{21}(x) \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} u_{12}(x) \\ u_{22}(x) \end{pmatrix}$ が1次独立 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) \end{pmatrix} \neq 0$ なので, 1次独立であることを言うには, $T(x) \neq 0$ を言えば良いわけですが, $T(x_0) \neq 0$ は分かっているのです, それがどのように変化するかを調べるために微分しました.

問. 「一般に, $\mathbf{u}^{(1)}(x_0), \mathbf{u}^{(2)}(x_0)$ が1次独立ならば $\mathbf{u}^{(1)}(x), \mathbf{u}^{(2)}(x)$ も1次独立」と書いていましたが, 特定の状態で成り立つからといって, 一般的な状態でも成り立つというのはおかしいと思います. 「 $\mathbf{u}^{(1)}(x), \mathbf{u}^{(2)}(x)$ が1次独立ならば $\mathbf{u}^{(1)}(x_0), \mathbf{u}^{(2)}(x_0)$ も1次独立」は納得いくのですが. // なぜ1点だけで, 一般的にいえるのかわかりません. // 具体例を出して説明してください.

答. おかしいというか, 当たり前のことではなくて, むしろ驚くべきことが成り立つので, その証明を講義で付けたわけですが. 具体例としては, 講義で示した例ですが, $u'_1 = -u_2, u'_2 = u_1$ という方程式の場合, $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ であり, $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ です. たしかに, 任意の x について1次独立ですね.

問. x_0 における条件として, $e^{(1)}, e^{(2)}$ をとらなくてもよいということですか? \mathbb{R}^2 の基底を $f^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ とすれば, $T(x_0) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} \neq 0$ となるからでしょうか?

答. そうです. 講義で説明したのとまったく同じ証明で, この場合も $T(x) \neq 0$ が示されます.

問. たとえば, 初期条件が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ でも 1 次独立になるのでしょうか?

答. 初期条件が 1 次独立でないと, すべての x について $T(x) = 0$ がわかるので, 1 次独立ではありません.

問. 斉次方程式の解 $v^{(1)}(x), v^{(2)}(x)$ が 1 次独立ならば, 任意の解は, $c_1 v^{(1)}(x) + c_2 v^{(2)}(x)$ (c_1, c_2 : 任意定数) で表されますか?

答. そうです. 解空間が 2 次元なので, その中の 1 次独立な 2 つの "ベクトル" は基底になります. この部分は (微分方程式ではなく) 線形代数の一般論からわかります.

問. $\frac{dT}{dx} = (a+d)T$ となる理由があるのですか?

答. 方程式 $\frac{du}{dx} = A(x)u$ の解の基本系の行列式であるということから必然的にそうなると言えます. たとえば 3 元の連立 1 次微分方程式について類似のことを示してみてください.

問. $\frac{d^n T}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \det \begin{pmatrix} u_{11}^{(k)} & u_{12}^{(k)} \\ u_{21}^{(n-k)} & u_{22}^{(n-k)} \end{pmatrix}$ であると思われませんか?

答. なるほど! 「ライプニッツの定理」に似た公式ですね. よく見つけました.

問. $S(x, x_0) = (u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) \end{pmatrix}$ ということなのですが, x_0 はどこに関係しているのかわかりません. // x_0 が全く関与していないと思うのですが.

答. $x = x_0$ における条件を課した解を $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)$ と取ってきているので, x_0 が確かに関与しています. つまり, x_0 を変えると $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)$ も変わり, $S(x, x_0)$ も変化するという次第です.

問. 基本系行列 $S(x, y)$ を定義することによってどのような利点があるのでしょうか? 具体的な例があれば教えてください.

答. 教科書 p.47 の定理を見てください. 非斉次方程式の一般解の公式に現れます. 具体例は p.48 を見てください.

問. 解析 3 の講義で, $\frac{dx}{dt} = A(t)x, x(s) = e_j$ の解を $\varphi(t, s, e_j)$ とし, $R(t, s) = (\varphi(t, s, e_1), \dots, \varphi(t, s, e_n))$ を解核行列と呼ぶと習いました. 今日やった基本系行列 $S(x, z)$ は同じものですか?

答. 同じものです. 「解核」とは, リゾルベント (resolvent) の訳ですね. 方程式を解くときの核のような役割を果たすから, そう呼ばれています. 教科書の p. 47 などを参照してください. ただし, このような専門的な訳語を使うときは, 「カイカク?」と聞き返されたときに, すぐに「リゾルベントのことだよ」と補足できるように, 複数の言い方を知っておいたほうが知的です.

問. $u(x)$ と $v(x)$ が解ならば $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ も解となるというのは, 線形写像の特徴と似ているように思います. // 「重ね合わせの原理」がわかって, どのようなメリットがあるのですか?

答. まさに, 線形写像だからです. 以前も回答書に書きましたが, 線形微分作用素は線形写像とみなせるので, kernel はベクトル空間 (線形空間とも言う) になります.

問. どこが線形なのですか?

答. 方程式を $\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} - a & -b \\ -c & \frac{d}{dx} - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という具合に, 線形微分作用素 (この場合は行列の形をしている) で表すと, 線形代数との類似は明白だと思います. まだ気づきませんか?

問. $\frac{du}{dx} = u^2$ に, 線形性は当てはまらないのですか?

答. u^2 は未知関数 u に関して線形ではありません. ですから, これは線形微分方程式ではありません.

問. 結局, 一般の同次方程式はどう解くのでしょうか? // $u(x) = c_1 u^{(1)}(x) + c_2 u^{(2)}(x)$ と表すことができるとなっていますが, a, b, c, d が含まれていません.

答. 鋭い指摘ですね. 具体的な解法は, 定数係数の場合だけは知られています. 本質的に, すでに説明した「単独の定数係数 2 階微分方程式」の解法と同じ解き方です. (教科書 p. 66 の例題 22 を参照). それを講義で簡単に (さわり = Key point) だけでも解説できればと考えています.

問・連立微分方程式 $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ について、例えば、 $u'' + au' + bu = 0$ などのような形を導きだし、そこで「定数係数 2 階線形微分方程式」を解く方法で解き、そこから u_2 を求め、一般解を導く、という方法もあるような気がします。

答・なるほど。でも、この場合は、行列の形のままで解きます。(教科書 p. 66 の例題 22 を参照)。

問・未知関数が 2 個の場合の説明がありましたが、未知関数がふえても同様のことができるのですか？ // $\frac{du_1}{dx} = a(x)u_1 + b(x)u_2 + c(x)u_3$, $\frac{du_2}{dx} = d(x)u_1 + e(x)u_2 + f(x)u_3$, $\frac{du_3}{dx} = g(x)u_1 + h(x)u_2 + i(x)u_3$ は解けるのでしょうか？

答・できます。教科書 p.51 をご覧ください。

問・行列の理論の発展の歴史について教えて下さい。何かの本で、行列の理論の発展には、線形微分方程式が深く関わっているというような記述を見た覚えがあります。

答・詳しく知りません。でも、確かに、線形微分方程式の研究が行列の理論の発展の動機づけとなった、というのは説得力がありますね。

問・行列成分に関数を用いたとき、ふつう通りに微分、積分に応用できるのでしょうか？

答・できます。それにしても、「行列の微分積分学」をなぜ大学でちゃんと教えないのか不思議です。線形代数と微分積分の上手な組み合わせなのに。

問・微分方程式と生物との関わりについて具体的な例を出して説明してください。

答・第 1 回の回答書で少し説明しているので、それを参照してください。ところで、微分方程式 $y' = (\log 2)y$ は「ネズミ算の方程式」です。それはなぜかわかりますか？

問・クレロー方程式とは何ですか？

答・ $u = xu' + f(u')$ という形をした微分方程式のことです。両辺を x で微分して解きます。

問・ $\exp\left(\frac{-x^2 + y}{2}\right)$ を 2 次までテイラー展開せよ、という問題で $X = -x^2 + y$ と置き、 e^X のテイラー展開に代入し、 X を x と y に戻すのは一体どう違うのか、また何故か、簡潔に説明、もしくは説明している本の紹介をしてもえませんか？

答・もちろん、セオリー通りの方法(偏微分を使った導き方)もありますが、質問のようなやり方でもできると思います。計算間違いだったか、説明不足だったのでは、と推測します。(どうして、そのように計算できるかという基本に関する説明が不足していた?) ところで、参考にすべき本としては、1 年生で習った微分積分の教科書には、多変数の場合のテイラー展開が必ず書いてあります。それを参照してください。

問・「不動点」「関数 $f(x)$ の解」などは「特異」ですか？日常生活では一体どういうものですか？例えば、地図を地面に置きます。その地面を示す地図内の点は「不動点」と聞いたことがあります。

答・そうです。「不動点」や「零点」は特異点ということができます。関係ないですが、私(石川)がよくたとえに使うのですが、特異点とは、いわば「豆腐の角」「重箱の隅」です。頭をぶつきたい、ほじくりたい。それはともかく、地図のたとえは「縮小写像には必ず不動点が存在する」という有名な定理をととても分かりやすく説明していますね。感心しました。

問・質問・納得書の評価を知ることが出来ますか？

答・できます。研究室に資料があるので、わかります。知りたい人は申し出て下さい。(あるいは研究室 4-505 に顔を出して下さい)。場合によっては自宅に資料がある場合もあるので、調べるのに時間がかかるかもしれませんが、とにかくわかります。試験の点数についても同様です。

問・テストで問題が出された場合、 $\frac{d^2u}{dx^2} = -\omega^2u$ や $\frac{d^2u}{dx^2} = \omega^2u$ の一般解、 $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)u = 0$ の一般解なども覚えて利用してよいのでしょうか？

答・もちろん良いです。ただし、その公式の導出を問われているときは答だけだと零点になるかも知れません。つまり、問題によります。どこまで説明を付けるべきかがわかるかどうか、という点もテストの目的の 1 つとってください。(時間と答案用紙の余白に余裕があればなるべく説明を加えたほうが賢明です。加点されるからです。説明不足で減点されることもあります。でも、ウソを書いたら、より減点される場合もあるので、自信のある場合に限りませう。状況判断が難しいですが、とにかく勉強の成果を十分に発揮してもらいたい)。ところで、数学に限らず、公式を丸暗記するよりは、基本的なことの関連を押さえながら、何度も使っていくうちに自然に頭に入る、というのが理想です。知識には「連想」が大切です。人間の頭脳は、精神衛生上の理由から、忘れっぽく出来ています。たとえと頭は「ザル」のようなものです。目が粗いザルです。でも、大事なことは忘れない。大事なことは、他のいろいろなことと関わっていて何かにつけて思い出します。大事なことにはいろいろな想いが連なっている。というわけで、こま切れに覚えたことは、時が経つとゴマのようにザルの目の間からこぼれ落ちてこまってしまうけれど、いろいろなことと関連づけておけば、お互い団結してダンゴのようになって、こぼれ落ちることはありません。そのような知識を身に付けましょう。ということで試験がんばってください。ではまた。