微分積分学 III (**微分方程式入門**) **質問の回答** 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 7 (２００２年5月３１日) の分

問．微分方程式の解の存在と一意性が良くわかりません．そもそも微分方程式の解が存在するとはどういうことでしょうか？// 解の一意性とは，グラフがただひとつ定まるということですか？

答．こんにちは．前回の講義 (５月３１日) からだいぶ間が開いてしまいましたが，今日 (７月５日) と，７月１２日の２回の講義をして，７月１９日にテストを実施します．よく復習してテストに臨んでください．テストについての詳細は別途掲示します．万一，テストの日の７月１９日が都合の悪い人がいたら早めに私 (石川) に連絡してください．この機会に，今までこの講義で学んだことを復習しておくと，その知識はしっかり定着して一生使えるものになります．請け合います．逆に，ここで，いままでの解法をまったく復習しないと，これまでの勉強は水の泡になります．ああ，もったいない．さて回答ですが,「微分方程式の解の存在と一意性」とは，初期条件を満たす解がただ１つ存在するということです．言い換えると，x-u 平面上で与えられた微分方程式と与えられた点を通る解曲線がただ１本だけある，x-u 平面上で共有点を持ってしまうような２つの解曲線はない，ということです．たとえば，初回の講義で説明した微分方程式 $u' = 3u$ の一般解は $u = Ce^{3x}$ と表され，C は任意定数であって，解は一意的に定まりませんでした．しかし，初期条件 $u(x_0) = u_0$ を指定する (つまり，x-u 平面上の点 (x_0, u_0) を指定する) と，$u_0 = Ce^{3x_0}$ から，$C = u_0e^{-3x_0}$ というふうに定数 C が決まります．解の一意性とは，このように，初期条件を決めると，解が１つに定まるという意味です．

問．$\dfrac{d^2u}{dx^2} + \alpha(x)\dfrac{du}{dx} + \beta(x)u = \gamma(x)$ 等の形の微分方程式についても解の一意性は言えるのですか？

答．言えます．$v = \dfrac{du}{dx}$ とおくと，この方程式は，１階の連立微分方程式 $\dfrac{du}{dx} = v, \dfrac{dv}{dx} = -\beta(x)u - \alpha(x)v + \gamma(x)$ となり，初期条件 $(u(x_0), v(x_0)) = (u_0, v_0)$ を決めれば，解がただ１つ決まります．

問．クレローの方程式 $u = xu' + \sqrt{1 + (u')^2}$ の特異解 $x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, u = xt + \sqrt{1+t^2}$ の t を消去するところで，$t^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ となりましたが，この時，$x \neq \pm 1$ は自明なのですか？// 特異解の $u = 0$ のときの状態が良くわかりません．// 特異解 $u = \sqrt{1-x^2}$ について，点 $(-1, 0), (1, 0)$ では u は微分可能ではないですよね．すなわち，$u = xu' + \sqrt{1 + (u')^2}$ を満たさないので，この点は省くべきではないでしょうか？// $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ より，特異解では，$u > 0$ となります．だから，半円を描いたときに，$u = 0$ の部分を白丸にして図示しなくてよいのですか？

答．良く気がつきましたね. 皆さんの指摘の通りです. 講義の解答例は不用意でした. 特異解の正解は $u = \sqrt{1-x^2}, -1 < x < 1$ です．$x = \pm 1$ の部分 ($u = 0$ の部分) は除きます.

問．クレローの方程式の一般解は，常に特異解の接線となるのですか？// たとえば，$u = xu' + {u'}^2$ の一般解と特異解について，判別式をとって考えると，$D = 0$ となるので，接することがわかります．// クレローの方程式は，f がどんな f であるかによって特異解がどんないでたちになるか，また，一般解とのつながりみたいなものはどうなのか，などと思います.

答．良い質問ですね．接線になります．**特異解は一般解の包絡線**です．ここで，包絡線 (ほうらくせん) とは，与えられた曲線の族 (ぞく) の１本１本の曲線すべてに接するような曲線のことです．たとえば，１つの円を考えて，それをある方向にそのまま平行移動させると無限個の円ができますが，これらの円の族の包絡線は，平行な２本の直線になります．ここで直線は曲がってはいない線ですが，もちろん曲線の一種と見なしています．円を”うねうね”移動させると，波打った２本の曲線が包絡線になります．ちなみに英語で envelope,「封筒」と同じ単語です．無数にある曲線たちを包み絡まる線といった意味あいです.

問．クレローの方程式で，解が存在しない場合がある，とはどういうことですか？// クレローの方程式では一意性が成り立たないことがよくわかりません．//「解に一意性がなく，解が存在しない時もある」の導き方がわかりません．// クレローの方程式の解のイメージがうまくつかめません.

答．講義で，一般解の作る解曲線たちと，その「包絡線」である特異解の解曲線を図示しましたが，そこに空白部分があることに気づいたと思います．それが意味することは，初期条件の指定の仕方によっては，その初期条件を満たす解が存在しない，ということです．また，一意性がない，というのは，共有点を持つ１組 (以上) の解曲線があるということです．空白でない部分の点は (少なくとも) ２つの解曲線が通っていることが観察できます.

問．クレローの方程式において,「解に一意性がない」というのは，一般解かつ特異解の場合があるということなのでしょうか？

答．そうではなくて，解曲線が共有点を持ってしまう，ということを意味します.

問．クレローの方程式の特異解を求めるところで，u' をパラメーターとして考えることにどういうメリットがあるのですか？それから，$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-f''(t)t - f'(t) + f'(t)}{-f''(t)} = t$ を確かめる必要性はあるのですか？

答．u' をパラメーターと考えることにより，$u - x$ 平面上の平面曲線が得られるからです．その曲線が本当に解曲線かどうかはすぐにはわからないので，確かめました.

問．微分方程式の解がわかる (初期条件を与えれば解の存在が言える，もしくは具体的に解ける) ものについて今までの授業で扱ってきましたが，クレローの方程式は，今までとは性質が違うように思いました．他にもこのような特殊な方程式というものはたくさん存在するのですか？// クレロー方程式以外にも「特異解」が存在するような微分方程式は存在するのでしょうか？

答．１階微分方程式のうちでは，特異解をもつような典型的なものはクレローの方程式だけです．このような特異解をもつような方程式は，他にもたくさんありますが，式変形，座標変形などの操作でクレローの方程式に帰着されるものが多いです.

問．一般解と特異解の違いは何ですか？// 特異解が特異に見えません．// 特異解と特殊解の区別がつきません.

答．特殊解は，一般解の中の一つの解ということです．(任意定数の部分を指定する)．講義で解法を説明した方程式ではほとんどの場合，解の存在と一意性が成立して，その場合は，すべての解が一般解という形で表現されました．し

かし，クレローの方程式の場合は，解の存在と一意性が成り立つとは限らず,「一般解」という形ですべての解を表そうとしても,「とりこぼし」が生じ，それが「特異解」と呼ばれるという状況です．

問． クレローの方程式は，どんな f でも複数の解がでるのでしょうか？例えば，$f=0$ のときは明らかに唯一の解しかでないと思います．これは，特異解が一般解に含まれて，一般解の解曲線が互いに交わらないからです．

答． なるほど．良い指摘ですね．$f=0$ のときは，$u=xu'$ となり，変数分離形なので，積分すると，$u=Cx$ (C は任意定数) という一般解が求まります．そして，初期値問題の解は一意的です．一般解は平行直線の族であり，包絡線を持ちません．

問． クレロー方程式であるものと，そうでないものの違いがよくわかりません．解が一意に存在する方程式は $\dfrac{du}{dx}=f(x,u)$ とでき，解が一意に存在しない方程式はクレロー方程式である，という区分でよいのでしょうか？

答． 少し荒っぽいですが，だいたい良いです．でも，数学では,「だいたい良い」というのはあまり意味がありません．より正確に,「$\dfrac{du}{dx}=f(x,u)$ の形で，f がある条件を満たせば，初期値問題の解は一意的に存在し，また，解が一意的に存在しない例は，クレロー方程式によって与えられる」という理解が良いと思います．

問． クレローの方程式は，微分方程式とならない性質をもっているのでしょうか？

答． クレローの方程式は，立派な微分方程式です．

問． クレローの方程式は，何か物理現象を探っているような時に現れる式でしょうか？それとも純粋に数学的に興味深いので取り上げられる式でしょうか？// クレローの方程式は，自然界では何を表しているのでしょうか？// クレローの方程式は，数学や物理のどういった場面で使われるのでしょうか？

答． 線形方程式を扱っている場合は，解の存在と一意性は確かに成立するのですが，非線形の方程式を扱う場合は，解の存在と一意性が成立しなくなる場合があります．もちろん，物理的には (物理的考察に基づいて) 解を一つに定め直す必要がなります．そのためにも，クレロー方程式に限らず，解の一意性が数学的には成立しない場合を研究する必要があります．(もちろん，純粋に数学的な興味からの研究も非常に大切です）.

問． リプシッツ連続でないが，解の一意性が言えるのは，たとえばどんな時ですか？リプシッツ連続でないが，連続な例として，$f(x)=\sqrt{x}(x\geq 0)$ はうかびますが，これはどうですか？

答． なるほど．u に関してリプシッツ条件 (教科書にある解の存在と一意性の条件) が成り立たない例として，たとえば，$\dfrac{du}{dx}=\sqrt{u}$ という微分方程式を考えると，変数分離法で，$u(x)=\dfrac{1}{4}(x+C)^2$ (C は任意定数) と解けます．これは，放物線 $u=\dfrac{1}{4}x^2$ を x 軸方向に平行移動した放物線の族です．それ以外に，$u=0$ という解があります．したがって，この場合，解の一意性が成立しません．実は $w=u+\dfrac{1}{4}x^2$ とおくと，$(u')^2=u$ という方程式から，$w=xw'+(w')^2$ というクレロー方程式が得られます．

問． u が 1 をこえないと，どうして言えるのでしょうか？x を増加させていくと，$1-u^2$ の値が正のうちは，u も増加するというのがわかりません．// $1-u^2>0$ である限り $\dfrac{du}{dx}>0$ だと，$\lim_{x\to\infty}u(x)=1$ となるのがわかりません．u が動く前に，$\dfrac{du}{dx}$ が u の動きを先に決めてしまうようで変な気がします．

答． $\dfrac{du}{dx}=1-u^2$ という方程式に関してですが，$1-u^2$ の値が正のうちは，$\dfrac{du}{dx}$ も正なので，u は単調増加です．また，u が 1 を超えると仮定すると，超える瞬間に，u は 1 になり，$1-u^2=0$ なのに，その瞬間 u は増加していて $\dfrac{du}{dx}>0$ となり $\dfrac{du}{dx}=1-u^2$ に矛盾します．したがって，u は 1 を超えません．また，x を大きくしていっても u が 1 に近づかないと仮定すると，$1-u^2$ は，ある正の数 a より常に大きくなります．したがって，$\dfrac{du}{dx}$ もある正の数 a より常に大きくなり，u は，ある正の傾きの直線 $u=ax+b$ よりも u が上にある，つまり，$u(x)\geq ax+b$ となり，x が大きくなると，$u(x)$ が 1 を超えてしまうことになり，上で証明済みのことと矛盾します．したがって，x を大きくとれば，$u(x)$ は 1 に近づく，すなわち，$\lim_{x\to\infty}u(x)=1$ がわかります．

問． 積分では解けないけれど，幾何的には解ける，というような微分方程式はあるのですか？// グラフや図からは，その解の性質などを確認するには分かりやすいと分かったのですが，そのグラフや図から，逆に解を導くとなると，抽象的な気がして，穴のある解答になってしまいそうな気がしてしまうのですが．// $u=u(x)$ の関数形を求めずに，グラフの概形を考える方法で得たグラフにどれだけの信憑性があるのでしょうか？グラフを書くことは，どのような意味があるのでしょうか？// 逆に，グラフにはない，具体的に解くことの利点はないのですか？

答． グラフの概形を考える方法には，定性的な部分の信憑性があります．(直前の回答を参照してください)．解の性質がよくわかります．関数形を求めたとしても，解の性質を調べなければ何にもなりません．一方，具体的に解の式を求めておくと，定量的な問題 (解の具体的な数値など) を解決するのに役立ちます．グラフの概形だけではデータとして不十分な場合もあります．結局，解の式を求めることも，解のグラフを調べることも，両方大事だ，ということですね．

問． 逐次近似法は，幾何学的な考察を式で表したような気がするのですか，そういうことなのでしょうか？

答． なるほど．そう考えることもできますね．

問． 微分方程式の局所解の存在のための条件と，関数の連続性でやった ε 論法は関連性がありますか？

答． 関係がないとも言えませんが，局所解の存在条件は，連続の条件よりも強い条件です．

問． $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\omega^2u=k$ (ω,k: 定数) はどのようにして解けばよいのでしょうか？

答． まだ，講義では扱っていませんが，(そこまで進めるかどうかわかりませんが)，教科書 p.63 の例題は類題なので，その解答を参考にして考えてみるとよいと思います．

問． 「特異」という言葉をどうとらえれば，僕の数学生活がこれからおもしろくなっていくのでしょうか？

答． 目立つもの，際立っているもの，変わっているもの，他と特に異なっているもの，それらは「特異」であると呼ばれます．皆さんの生活の中で，特異なものを探してみてください．ではまた．