微分積分学 III (微分方程式入門) 納得の解説 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ６（２００２年5月２４日) の分

解．微分方程式の解の存在と一意性に納得しました．// $\exists M > 0, a < x < b, u, v \in \mathbf{R} \Rightarrow |f(x,u) - f(x,v)| \leqq M|u-v|$ (リプシッツ条件) が大域解の存在を導くことを納得しました．// あとは具体的な問題で考えてみたいと思いました．

説．こんにちは．ところで，来週６月７日は北大祭のため (共通教育科目全般に) 休講ですね．６月１４日は平常通り講義がありますが，６月２１日と６月２８日は，私 (石川) の海外出張のため休講とします．すみません．W カップ日本代表の予選の結果を見届けてから２週間，ポーランドのワルシャワに行ってきます．さて，解説 (共感，助言，説教，回答) ですが，**微分方程式の解の存在と一意性**は重要で基本的な数学的事実なので，これからもこの事実と関連したことを考えなければならない機会が何度かあると予想されます．なかなか味わい深い，スルメのような定理です．とりあえずテキストの後ろにある証明をながめみて，今から親しんでおいてください．

解．別の授業で，u が連続かつリプシッツ条件をみたせば，解は一意的であることを習いました．リプシッツ条件をみたさないときは，一意的ではないことも習いました．

説．そうですか．そして，習った定理の本当の意味を知るには，たくさんの具体例を知る，ということですね．ところで,「リプシッツ条件をみたさないときは，一意的とは限らない」と言ってください．リプシッツ条件をみたさなくても解が一意的になることもあるかもしれないので．

解．解の存在はグラフで考えると分かりやすいことを納得しました．

説．そうです．第１回の講義で説明したように，$x - u$ 平面上に「方向ベクトル場」(矢印) が与えられていて，平面が解曲線たちによって，くまなく埋め尽くされていると考えるとわかりやすいと思います．

解．微分方程式を解く一般的な方法が存在しないこと，積分という作業を用いなければならない微分方程式の解法にも一般的なものは存在しえない，と納得しました．// 微分方程式は一般には ”解けない” ということですが，それでも，初期条件を何か１つ与えてやりさえすれば，ものすごく狭い範囲であるにしても，解の存在がいえるというのはとても興味深いことだと思いました．これは，ある意味で，”解けた” と解釈することができるのではないでしょうか？

説．”微分方程式を解く”ということはどういうことか，これは確かに難しい問題です．通常は，微分方程式の解を具体的な式で求めることを「解く」と言いますが，実際問題として，具体的に解ける場合は，そう多くはありません．その場合，解の定性的性質を調べることも有効な方法になります．その際に，解の存在と一意性は大きな味方になります．

解．単振動の運動方程式を納得しました．なぜ微積をやる必要があるのか実感しました．// 単振動の式の形の由来がわかりました．// 高校のとき「公式」として使ってきた式の意味が理解できました．// 高校の時は暗記していただけのものが計算で導かれることにとても感心しました．// 解き方を暗記しただけで理解していなかったけれど，今になって納得しました．// 自分で解けるようになったのが嬉しいです．// 以前学んだ変数分離法の解き方もあり，さまざまな解き方があり，とてもおもしろいです．// ニュートンの方程式と $\dfrac{d^2u}{dt^2} + p\dfrac{du}{dt} + qu = 0$ は別個のものではないか，という認識が自分の中ではあったのですが，$p = 0, q = -\omega^2$ とするとニュートン方程式になるのは，今迄気がつきませんでした．// 公式であったものは自力で求められるのだと，また数学からの技だったのだと改めて実感しました．// 振り子の等時性の法則を納得しました．// 微分方程式の具体的な応用方法がわかりました．// 微分方程式の物理への応用性について納得しました．

説．考えてみると，歴史的に見て一番大切な関数は，多項式 (整式) や有理式 (分数式) を除けば，三角関数，つまり，サイン，コサイン，タンジェントだと思います．三角関数の起原は，御存じのようにエジプト文明の測量の問題までさかのぼれます．しかし，その後，単振動の方程式の解としても三角関数が登場しました．たぶん，これは偶然だったのだと思いますが，実は三角関数は，単振動の解であることが最も重要な存在意義ではないか，と考える今日この頃です．(そして，指数関数は，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を通して三角関数を支配する関数だから重要である…)

解．同じ微分方程式の解き方でも，いろいろあることを知りました．// 微分方程式を解くのに色々な解法があって，でも解が同じであることを納得しました．

説．そうですね．ところで，たとえば，１階定数係数微分方程式 $\dfrac{du}{dx} = \alpha u$ の解法をわれわれはいくつ知っているでしょうか？数えてみてください．

解．ニュートンの運動方程式などの物理現象や法則が，微分方程式の問題に帰着されることがわかりました．// 今では，”数学”，”物理”，と分野が分れてしまっていますが，実際は非常に似たもの，一体であるな，と分かりました．// 物理 = 微分方程式という気がしました．

説．なるほど．でも，物理法則のすべてが微分方程式の問題に帰着されると言うと，それは言い過ぎだと思います．とは言うものの，微分方程式で現象が記述できる場合がほとんどなのは確かです．ところで，微分方程式は，微分の定義から，連続的な世界観 (「世界は連続である」) をもとに理論が構成されています．しかし，２０世紀に発見された量子力学により,「世界は微視的には不連続である」ということが認識され，それが現在では科学的な常識になっています．にもかかわらず，連続的な世界観を基にした微分方程式によって，そのような量子的な現象も記述できるという事実は不思議であり，非常におもしろいことだと思いますが，いかがでしょうか？

解．質問ですが，初期条件が $u(0) = c, u'(0) = d (d \neq 0)$ ということもあり得ますか？その場合，式の中に $\cos, \sin$ 両方とも存在してしまいますか？

説．そうです．たとえば，初期値が $u(0) = 0, u'(0) = d$ なら，振動は $\sin$ で表されます．

解．実数 e の虚数乗が，e のべき乗もまったく使わずに，三角関数の和で表すオイラーの公式はとても不思議に思い

ました．// $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ が成り立つことが，$\cos y$ の級数展開と，$\sin y$ の級数展開を考えるというアドバイスから納得しました．

説． よかったですね．ところで，私 (石川) は，三角関数は，実は，指数関数から定義した方が，数学的には厳密ではないか，と考えています．つまり，級数をもとにして，$e^z = \sum_{n=0} \dfrac{z^n}{n!}$ という式 (z は複素数) で指数関数を定義し，その後，$e^{it} = \cos t + i \sin t$ という式で，cos と sin で定義するわけです．すべてのことを級数をもとに説明する.「万事級数」ということです．

解． 今までは，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に関する微分方程式だったが，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ としても，今まで通りの方法で解けることを納得しました．さらに，$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ でも可能であることがわかりました．

説． そうです．このような方法を「複素化」(complexification) と言います．複素数値関数 $w(x) = u(x) + iv(x)$ については，$\dfrac{d^r w}{dx^r} = \dfrac{d^r u}{dx^r} + i\dfrac{d^r v}{dx^r}$ と考えればよいので，複素数値関数が微分方程式をみたすかどうかも定義されます．そして，特性方程式の方法では，特性方程式の解は一般に複素数なので，複素数値の解も含めて解いた後，そこから，必要があれば実数値の解を取り出す，ということになります．また，複素変数関数に関する微分方程式の理論 (変数も複素化する) もあります．

解． $\dfrac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 u$ の一般解は，特性方程式で解いた場合，$u(t) = (c_1 + c_2)\cos \omega t + i(c_1 - c_2)\sin \omega t$ ($c_1, c_2 \in \mathbf{C}$: 任意定数) となりますが，この一般解が $u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ ($a, b \in \mathbf{R}$: 任意定数) となるように変形できるときは，c_1, c_2 は互いに共役となる場合ですね．

説． そうです．よく気がつきましたね．念のため，複素数 c_1, c_2 に対して，$c_1 + c_2$ と $i(c_1 - c_2)$ が両方とも実数であるのはどういう場合か調べてみましょう．$c_1 = h + ik, c_2 = \ell + im$ とおくと，$c_1 + c_2 = (h + \ell) + i(k + m)$ が実数なので，$k + m = 0$ です．また，$i(c_1 - c_2) = i\{(h - \ell) + i(k - m)\} = -(k - m) + i(h - \ell)$ が実数なので，$h - \ell = 0$ です．よって，$\ell = h$ であり $m = -k$ がわかり，$c_2 = \ell + im = h - ik = \overline{c_1}$ (複素共役) です．

解． 「局所的に存在する解」というものと,「局所的にしか定義されていない微分方程式」というのが別のものなのでしょうか？

説． 別のものです．たとえば，以前，変数分離法で解いた方程式 $\dfrac{du}{dx} = u^2 - 3u$ は，大域的に定義されていますが，解は，初期値によっては，大域的に延長できませんでしたね．教科書 p. 6 参照．

解． 逆像について理解できました．// 「逆像」は，なんとなく「逆の写像」というイメージでしたが，全然違うということがわかりました．

説． なるほど．写像は英語で mapping,「地図を作ること」意訳すると「像を写すこと」という意味です．一方，像は image，逆像は inverse image です．日本語訳の仕方が理解を妨げているのかもしれません．結局，像や写像は"もの"であり，写像は"行為" という扱いです．

解． 物理では，$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ は常に微分可能なのですか？

説． 特にことわらない限り，微分可能であると仮定しているようです．でも，ブラウン運動などの場合は，いたるところ微分不可能な連続関数も物理であつかうようです．

解． 数学では，直接に全体について考えるのではなく，ある点とか，ある局所的な部分について論じて，その点が任意であるとか，大域的にするとかで全体について論じるのですね．

説． 難しいことですが，ニュアンスはわかります．数学は分析的な方法を使って，論理的に対象を研究するので，当然そうなるのかな，と思います．

解． グラフの傾き (一瞬の増加，または減少の比率) を求めると言う概念自体を考えついた人々には脱帽です．

説． ニュートンやライプニッツに脱帽ということですね．

解． 微分作用素と固有空間について納得しました．// 線形代数の話が出てくるなど，数学が色々な分野と関係していることを納得しました．

説． そうです．数学に限らず，一つのことを集中して突き詰めて考えていくと，そのうち視野がぱっと開けて，色々な分野と関係することに気が付くわけです．

解． ちなみに微分方程式という学問は，歴史的にどういう所から始まったのでしょうか？

説． ニュートン力学からだと思います．

解． 高校３年の夏休みに，ある大学のオープンキャンパスに行き，数学科の高校生向けの講義を聞きました．その中で，オイラーの公式を使って，月のまわりにできる光の波の式を導くというものがあり，私はとても感動した覚えがあります．今日の単振動の方程式の一般解を導くときも，オイラーの公式が使われていて，そのことを思い出し，物理と深い関わりがあるのだなあ，と思いました．

説． そういう経験は大切ですね．皆さんも，いろいろエピソードを持っていると思います．数学 (や物理) に興味をもつようになったきっかけ等を，質問や納得のついでに書いてみてください．

解． 授業についていけてない気もしますが，頑張って復習します．

説． 授業についていけてない気がしても大丈夫です．そして予習と復習をすることは大いにお勧めです．ではまた．