微分積分学 III (微分方程式入門) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 5 (２００２年5月１７日) の分

問. $\dfrac{d^3u}{dx^3}+p\dfrac{d^2u}{dx^2}+q\dfrac{du}{dx}+ru=0$ や $\dfrac{d^nu}{dx^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{du}{dx}+a_nu=0$ の解はどうやって求めるのですか？特性方程式 $t^3+pt^2+qt+r=0$ を解いて，$\dfrac{d^2u}{dx^2}+p\dfrac{du}{dx}+qu=0$ と同様の作業を繰り返せば解が求まると思うのですが，どうでしょうか?// ３次式は $\mathbf{C}$ で必ず解を３つ持つことから，３次式の解のうち１つでもはっきりと定まったものを見つければ，そのような３階微分方程式はすべて一般解を見つけることができるということですね．// 特性方程式 $t^3+pt^2+qt+r=0$ の解を α,β,γ とし，$(\dfrac{d}{dx}-\alpha)(\dfrac{d}{dx}-\beta)(\dfrac{d}{dx}-\gamma)u=0$ と書き換え，$(\dfrac{d}{dx}-\alpha)w=0$ を解き，$(\dfrac{d}{dx}-\beta)v=w$ を解き，$(\dfrac{d}{dx}-\gamma)u=v$ を解くとやっていくと解けるような気がします．// 一般解は $c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}+c_3e^{\gamma x}$ と表せますか？// 別の考え方が必要なのでしょうか？// 教科書では定数係数２階線形方程式のときしか書いていませんが，一般の定数係数 n 階線形方程式 $\sum_{k=0}^{n}a_k\dfrac{d^ku}{dx^k}=0$ も，$\Pi_{k=1}^{n}(\dfrac{d}{dx}-\beta_k)u=0$ とできるならば，一般解は $u(x)=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\beta_kx}$ となるのですか？(ただし，$i\neq j\Rightarrow\beta_i\neq\beta_j$ の場合)．// 特性方程式の解が見つかれば，n 階でも解けますか？// n 次の代数方程式は，代数学の基本定理から，複素数域において，重複度を含めて n 個の解を持つから，n 個の１階作用素に因数分解できると思いました．この考え方はどうなのでしょうか？// 定数係数 n 階微分方程式の解が具体的な形でわかることと，特性方程式として出てくる n 次方程式の解が具体的に求まることは同じこと，という事でしょうか？

答. こんにちは，そろそろサッカーのワールドカップ大会が始まりますが，いかがお過ごしですか？さて回答ですが，そうです．２階定数係数微分方程式の解法は，一般化できます．線形代数，とくに「ジョルダン標準形」が関連する内容になります．これから講義で説明する予定です．教科書 p.55 〜が該当する部分です．

問. 特性方程式はどう導くのですか？

答. 微分作用素の $\dfrac{d}{dx}$ を変数 t で置き換えて得られます．

問. 特性方程式の解 α,β はどんな意味があるのでしょうか？

答. V_α を微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ に関する固有値 α の固有空間とします：$V_\alpha=\{u\mid\dfrac{du}{dx}=\alpha u\}$. すると，$\alpha\neq\beta$ のとき，微分方程式 $u''+pu'+qu=0$ の解空間が V_α と V_β の直和に分解されるという意味があります．

問. 定数係数２階線形微分方程式の一般解の意味が知りたいです．$\alpha not=\beta$ のときは $\{e^{\alpha x},e^{\beta x}\}$ を基底とした線形結合の式のように見えます．

答. その通りです．特性方程式が重解を持つ場合は，$e^{\alpha x},xe^{\alpha x}$ が解空間の基底です．

問. $u''+pu'+qu=0$ の形をした方程式は，すべて特性方程式の考え方で解けばよいのですか？// 定数係数２階線形微分方程式の一般解は覚えなければいけないのですか？// 試験では，公式だけを使って解くことはできますか？// 答案にはどのくらい書けばよいのですか？説明があまりないので答案を見る人はどう思うでしょうか？

答. 特性方程式を解いて，一般解の公式に当てはめれば良いです．でも，状況によって方法を使い分けられたほうがより良いので，ここでは，講義で扱わなかった考え方を紹介しておきましょう．$(\dfrac{d}{dx}-\alpha)(\dfrac{d}{dx}-\beta)u=0$ $(\alpha\neq\beta)$ を解くために，部分分数分解 $\dfrac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)}=\dfrac{A}{t-\alpha}+\dfrac{B}{t-\alpha}$ を考えます．ここで，$A=\dfrac{1}{\alpha-\beta},B=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$ と計算されます．これは，$1=A(t-\beta)+B(t-\alpha)$ ということですから，関数 u は $u=A(\dfrac{d}{dx}-\beta)u+B(\dfrac{d}{dx}-\alpha)u$ と分解されます．特に，方程式 $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)(\dfrac{d}{dx}-\beta)u=0$ の解について，$v=A(\dfrac{d}{dx}-\beta)u$ は $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)v=0$ の解なので，$v=c_1e^{\alpha x}$ と表され，$w=B(\dfrac{d}{dx}-\alpha)u$ は $(\dfrac{d}{dx}-\beta)w=0$ の解なので，$w=c_2e^{\beta x}$ と表されるので，$u=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}$ と表されます．(逆に，この形のものは解)．微分方程式 $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)^2u=0$ についても同様に考えられます．(自分で少し考えてみてください)．

問. $u''-u'-2u=0,u(0)=1,u'(0)=0$ を以前に解いた様に，$u(x)=e^{\alpha x}v(x)$ とおくと，$u''-u'-2u=e^{\alpha x}\{v''+(2\alpha+2)v'+(\alpha^2-\alpha-2)v\}=0$. $\alpha=-1$ とおいて $v''=0$ より，$v=ax+b$. よって，$u=e^{-x}(ax+b)\ldots$ というような解き方をしてもよいのですか？

答. よい質問ですね．もちろん正しい解き方です．いろいろな解法を紹介しているので，いろいろ身に付けてください．

問. 問題を解いていて行き詰まりました．$\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+1=0$ の一般解はどのように記述されるのでしょうか?解を $x(t)=e^{\lambda t}$ と仮定すると，$\lambda^4+2\lambda^2+1=0,(\lambda^2+1)^2=0,\lambda^2=-1$ となり $\lambda=i$ なので，$x(t)=c_1e^{it}+c_2te^{it}+c_3t^2e^{it}+c_4t^3e^{it}$ となるのですか？

答. よく勉強していますね．さて，$\lambda^2+1=0$ から $\lambda=\pm i$ となるので，一般解は，$x(t)=c_1e^{it}+c_2te^{it}+c_3e^{-it}+c_4te^{-it}$ ですね．

問. $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)^{-1}$ が何を表しているのかよくわかりません．// $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)^{-1}$ とは，写像 $(\dfrac{d}{dx}-\alpha)$ の逆の作用というふうに考えるしかないのですか？

答． 講義で説明したように，$(\frac{d}{dx}-\alpha)^{-1}f(x)$ は $(\frac{d}{dx}-\alpha)u(x)=f(x)$ となるような $u(x)$ を表す記号です．つまり「逆像」の記号です．ところで，大学１年生で「写像」を習ったとき,「逆像」についても習っていると思います．でも,「逆像」を正しく理解し使いこなす人はあまりいないのが残念です．試験や質問書でも,「逆像」を使うこなすひとがいない．そこで，もう一度，念のため「逆像」の定義を書いておきます．いま，写像 $L:U\to F$ があったとして，写像の行き先 F の (何でもよいから１つの) 要素 $f\in F$ に注目します．このとき，**写像 L による f の逆像**とは，$L(u)=f$ を満たす U の要素 u (一般には複数ある) の集まりのことを言います．そして，記号で，$L^{-1}f$ (あるいは，$L^{-1}\{f\}$) と書きます．ここでは，$L=(\frac{d}{dx}-\alpha)$ であり，$f=f(x)$ です．微分方程式の解を「微分作用素」と「逆像」の記号を使って表したわけです．より，正確には，逆像は集合なので，$(\frac{d}{dx}-\alpha)^{-1}f(x)=\{u=ce^{-\gamma(x)}+e^{-\gamma(x)}\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\gamma(t)}dt \mid c\in\mathbf{R}\}$ と書くことができます．

問． $z=x+yi$ について，$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ がわかりません．この式の証明はあるのですか？// 高校時の極形式は $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ という形で円を考えて説明されましたが，これが $z=re^{i\theta}$ となる時は，どういうイメージの図を考えればいいでしょうか？そもそも i をべき乗の項とするという意味がよくわかりません．// 以前「定義として覚えるように」と言われました．

答． 証明があります．e^z, $\sin y$, $\cos y$ のべき級数 (テイラー級数ともよばれる無限級数) による定義から導かれます．$e^{x+yi}=e^xe^{iy}$ の部分はよいと思うので， $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ の部分の説明すると，$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n$ の y の偶数次の部分が $\cos y$ の級数展開で，奇数次の部分は $i\sin y$ に等しくなります．

問． 特性方程式の解が複素数になるとは，一体何を意味しているのですか？// $u(x)=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}$ において，α や β が複素数のとき，c_1,c_2 も複素数の中で考えるのですか？// 解空間はどうなるのでしょうか？// e^i や i を含んだ式の形のままで解答としてしまってもよいのでしょうか？// 複素積分にならなくてもよいのでしょうか？

答． 行列の固有値が複素数になるのと同様の状況です．α,β が複素数の場合，一般解 $c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}$ も複素数の範囲で考えるのが自然です．つまり，c_1,c_2 は複素数の範囲の任意定数と考えます．ただし，変数 x は実変数のままで考えられます．積分は，実積分です．ただし，通常は，解くべき方程式が実係数の場合，やはり，解も実係数で求める (あるいは，実用上必要がある) ので，複素係数の一般解から，実係数の一般解を取り出します．教科書 p.23 の例題 11 (2) の問題では，初期条件を満たす解を複素係数で確定したあと，(同じ関数である) 実係数の式に変形します．

問． １階連立系の線形微分方程式は，１階線形微分方程式を同じ様に解けるのでしょうか？

答． 発想は同じですが，解法はすこし変わります．教科書 p.38〜に説明があります．

問． 加速度という概念は速度を微分したものと定義しているのでしょうか？

答． そうです．それを「力」と結び付けたことろがニュートンの偉いところです．

問． 教科書 p.21 の下から５行目は $(\frac{d}{dx}-\alpha)v=0$ であり，$v(x)=ce^{\alpha}x$ だと思うのですが．(その後も α,β が逆).

答． その通りです．教科書のミスプリントを見つけると，実力がつきます．

問． $u=c_1e^{\alpha(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{-\alpha(t-x_0)+\alpha(x-x_0)}f(t)dt=c_1e^{\alpha(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)dt$ の等式に疑問があります．

答． $-\alpha(t-x_0)+\alpha(x-x_0)=-\alpha t+\alpha x_0+\alpha x-\alpha x_0=-\alpha t+\alpha x=\alpha(x-t)$ からわかると思います．

問． $(\frac{d}{dx}-\alpha)v=f(x)$ を $\frac{d}{dx}(e^{\gamma(x)}v)=f(x)e^{\gamma(x)}$ と書き換えるというところがわかりません．$e^{\gamma(x)}v=\int_{x_0}^{x}e^{\gamma(t)}f(t)dt+c_1$ と変形しているのも，なにをしたのかわかりません．// 教科書やノートのどこかに書いてありますか？

答． 教科書 p.18 の後半に説明があります．講義では，問 10 の演習の直後に説明しました．$(e^{\gamma(x)})'=\gamma'(x)e^{\gamma(x)}=-\alpha e^{\gamma(x)}$ に注意しましょう．

問． $\frac{d^2u}{dx^2}+p\frac{du}{dx}+qu=(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)u=0$ に対し，$(\frac{d}{dx}-\beta)u=ce^{\alpha x}$ という方程式がどうして出てくるのかわかりません．

答． $(\frac{d}{dx}-\beta)u=v$ とおくと $(\frac{d}{dx}-\alpha)v=0$ なので，$v=ce^{\alpha x}$ と表されるからです．

問． $(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)u=0$ で，$(\frac{d}{dx}-\alpha)v=0$ を $(\frac{d}{dx}-\alpha)v=f(x)$ として解いたのはなぜですか？

答． 後で使うためです．$(\frac{d}{dx}-\beta)u=ce^{\alpha x}$ の解を事前に求めておくためです．

問． $u\mapsto(\frac{d}{dx}-\alpha)u\equiv\frac{du}{dx}-\alpha u$ と簡単に考えてよいのでしょうか？

答． そうです．これが定義です．確かに,「微分」と「定数倍」を同格に扱っているので，違和感があるかもしれませんが，両方とも線形写像であり，それぞれ 1 階と 0 階の微分作用素と見なされるので，まとめて表記したわけです．

問． 作用素 (写像) として等しいとはどういうことですか？

答． 回答書 No.4 で説明したように，作用素は関数空間から関数空間への写像と見なすことができます．いま２つの写像 L と K が「写像として等しい」というのは，定義域の任意の u に対し $L(u)=K(u)$ ということです．したがって，$\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q=(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)$ という意味は，$(\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q)u=(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)u$ が任意の u に対して

成り立つ，という意味です．

問． $\dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{d}{dx}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ となるのがわかりません．

答． x で微分して，もう一度 x で微分すると，x で 2 回微分することになる，ということです．行列で，$A\cdot A=A^2$ と書くのと同じです．

問． $\dfrac{du}{dx}$ を分数的に扱えることは正当化できるのですか？

答． 「合成関数の微分法則」や「置換積分の理論」として正当化できます．回答書 No.2 (その 2 の表面の中程) に回答があります．

問． 無限階の $(\sum_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}} a_n(\dfrac{d}{dx})^n)u=0$ のような方程式は意味を持つのでしょうか？x の範囲によって収束したりしなかったり，ということもあるのでしょうか？

答． 意味を持たせることができます．もちろん「問題は収束性にあり」です．たとえば，$\sum_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}} a_n\dfrac{d^u}{dx^n}(x)$ が「x に関して一様収束」し，その極限が 0 である，という解の定義ができます．ただし，私 (石川) は無限階微分方程式の理論もその応用例もまだ見たことはありません．

問． 微分と積分は別々に作られたと聞いた事がありますが，どのように統一化されたのですか？積分が微分の逆演算であることはどのように発見されたのですか？

答． 「積分」は面積や体積の計算の必要性から,「微分」が発見される以前にすでに使われていました．その後，ニュートン (1642-1727) が，(ライプニッツとは独立に) 微分の考え方を導入し，さらに積分が微分の逆演算であることを発見し，それ以降，徐々に「微分積分学」として確立していく，という歴史の流れです．

問． ライプニッツも微積分に関して何か逸話があるのですか？// 余談ですが，ニュートンとライプニッツで，微分を発見したのはニュートンの方が早かったが，発表したのはライプニッツの方が早かった，というふうに聞きました．数学の世界では，どちらが「発見者」になるのですか？発表が遅くても発見が早かったニュートンですか？

答． ライプニッツ (1646-1716) もニュートンと独立に，微分を発見しました．彼は，1684 年に論文を公表しています．ニュートンが有名な「プリンキピア」を書いたのが 1686 年なので，ライプニッツの方が早いと言えますね．当時,「先取権」について，いろいろ論争があったようです．それはともかく，現代では，発表した時期を基準にしますね．ところで，現在使われている微分の記号 y' や $\dfrac{dy}{dx}$ や「関数」という用語や積分の記号 $\int f(x)dx$ などは，ライプニッツが導入した記号です．でも，微積分学をより深く理解していたのは，どうやらニュートンのようです．いつ発見したか，も大切ですが，どう発見し，どのように発展させたか，も重要です．

問． 微分方程式はニュートン物理学の全てに応用可能ですか？

答． もちろん応用可能です．数学というものは，一度正しさが確立されたなら，どんな状況にも応用可能です，微分方程式は，ニュートン力学に限らずいろいろな分野に応用されています．たとえば,「シュレディンガーの波動方程式」は量子力学の基本の方程式です．

問． 実際に物理などで 3 階微分方程式はどのように使われますか？

答． 確かに，応用上は 1 階や 2 階の微分方程式が多く登場しますが，たとえば，浅い水に生じる波である「ソリトン」を記述するときに，KdV 方程式と呼ばれる 3 階 (非線形) 微分方程式が使われています．

問． 微分積分学は物理の世界と数学の世界で違うのですか？数学は計算で，物理は加速度，速度など実用性があるということですか？

答． むずかしい質問ですね．そもそも「微積分学」が作られたとき，これは物理，これは数学，という区分はありませんでした．そもそも「物理」という学問は新しい学問です．ニュートン自身，自分が「物理学者」であるとはまったく思っていなかった．あくまで数学者，あるいは自然哲学者，あるいは錬金術研究家であったと思います．ところで,「数学は計算」で,「物理は実用」という指摘は，おもしろいですが，すこし考え方がせまいかなと思います．たとえば,「数学は説明」「物理は予測」あるいは,「数学は論理」「物理は構想」とも言えます．それはともかく，微積分学がすべての数理科学の基礎であることに間違いはありません．ではまた．