微分積分学 III (微分方程式入門) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ４ (２００２年5月１０日) の分

問．「微分作用素」とは何ですか？微分作用素は数字と同じように扱ってもよいのですか？

答．こんにちは．さて回答ですが，微分作用素とは，微分を記号で表したものです．$\frac{d}{dx}$ や $\frac{d}{dx}-\alpha$ や $\frac{d}{dx}+\alpha(x)$ や $\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q$ などです．これらは，関数を「微分する」という行為を，関数に「微分作用素という物を作用させる」と見なしたのです．いわば，味の素ならぬ「微分の素」です.「数字」というより，a とか x などと同じような記号として扱ってよいものです．もっと詳しく説明すると，微分作用素は「写像」と考えられます．ただし,「関数空間から関数空間への写像」です．たとえば，関数 $u(x)$ に対し，関数 $\frac{du}{dx}-\alpha u(x)$ を対応させる写像が，微分作用素 $\frac{d}{dx}-\alpha$ です．

問．$(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)u$ を $(\frac{d}{dx}-\alpha)\{(\frac{d}{dx}-\beta)u\}=(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{du}{dx}-\beta u)=\cdots$ と計算していましたが，$\{(\frac{d}{dx}-\alpha)(\frac{d}{dx}-\beta)\}u$ と考え，$(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha\frac{d}{dx}-\beta\frac{d}{dx}+\alpha\beta)u$ と計算しても答えは等しくなりました．つまり，先に微分作用素だけを計算してしまってもよいということなのですか？

答．まさにその通りです．それが講義で言いたかったことです．

問．数列の漸化式の問題で $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ のときに，方程式 $x^2+px+q=0$ のことを特性方程式と教わりました．特性方程式という言葉は，一体何の事を言うのですか？

答．良いところに気がつきましたね．特性方程式とは，もとの方程式の特性を表現した補助的な方程式のことを言います．たとえば，固有値問題 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ に対しては，代数方程式 $\det(tI-A)=0$ を特性方程式と言います．(固有方程式とも言います)．ところで，微分方程式 $\frac{d^2u}{dx^2}+p\frac{du}{dx}+qu=0$ の特性方程式が $t^2+pt+q=0$ であり，方程式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式が同じ $t^2+pt+q=0$ になる (ここでは，関数の変数 x と区別するために，変数 t を使いました) のは，偶然ではありません．実は，微分方程式に関連して，数列の漸化式のことを「差分方程式」ともよび，微分方程式 $\frac{d^2u}{dx^2}+p\frac{du}{dx}+qu=0$ と差分方程式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ は類似した性質をもつことがわかっています．

問．線形代数では，ベクトル空間の間の構造を保つような写像として,「線形」という意味が使われていますが,「線形微分方程式」という場合も，そのような解釈は可能ですか？

答．可能です．微分作用素を「関数空間から関数空間への写像」と見なしたとき，それが線形写像になる場合，その微分作用素を「線形微分作用素」と言います．上の回答にある微分作用素の例はすべて線形です．微分作用素 L 関数 u に作用させたものを $L(u)$ と書く時，$L(u_1+u_2)=L(u_1)+L(u_2), L(cu)=cL(u)$ (c は定数)，という条件をみたすものを線形微分作用素とよぶわけです．また,「線形微分方程式」$L(u)=g$ の解空間は線形空間 (あるいはそれを平行移動させたもの) になります．

問．授業で，$\frac{du}{dx}+\alpha(x)u=g(x)$ の形は，$\gamma(x)=\int_{x_0}^x\alpha(x)dt$ とおき，$\frac{d}{dt}(e^{\gamma(x)}u)=g(x)e^{\gamma(x)}$ に形にできる事から，解を導きだす方法を提示していましたが，この形は，この方法でしか上手く解を導き出せないのでしょうか？// 結局この方法を覚えればよいということですか？// この変形には必然性があるのでしょうか？// $\frac{d}{dt}(e^{\gamma(x)}u)$ という形はどこから出てきたのですか？使うなら暗記するしかないのですか？// 定数変化法でしか解くことができないのですか？// 手順はわかるので解こうと思えば解けるのですが，どうしてこのように置き換えると $u(x)$ が求められるのかわかりません．微分方程式とは，解き方を考えるものではなく，解き方を暗記するものなのですか？

答．何度も解いているうちに自然に落ち着く，簡単な (上手な) 方法です．これしかない，とは断定できませんが，基本的方法の一つです．解法は文化です．ところで，自分で解き方を一から考えてもよいのですが，はじめからそうすると，何百年もかかるはずで，それは現実には不可能なので，最初は，知られている方法を学ぶ (= まねる) のが第一だと思います．暗記する前に，まねるのが良いと思います．

問．$\frac{d}{dt}(e^{\gamma(x)}u)=g(x)e^{\gamma(x)}$ の解は，$u=e^{-\gamma(x)}\int_{x_0}^x g(y)e^{\gamma(y)}dy$ でよいのですか？

答．少し良くありません．積分定数を忘れずに，$e^{\gamma(x)}u=\int_{x_0}^x g(y)e^{\gamma(y)}dy+d$ として，$u=e^{-\gamma(x)}(\int_{x_0}^x g(y)e^{\gamma(y)}dy+d)$ と解かなくてはいけませんね．

問．定数変化法の解の一意性，すなわち，$u(x)=c(x)e^{-\gamma(x)}$ とはならない解が存在しない，という命題は証明されているのでしょうか？// なぜ，$u(x)=c(x)e^{-\gamma(x)}$ の形のものだけだとわかるのですか？ // この形の解以外に解けないのでしょうか？もし，これ以外に解があるのならば求めることはできるのでしょうか？// これ以外の形においても解けるのですか？

答．証明については，教科書の後半の付録にあります．それはともかく，解の一意性から，この解法が正当化される，というのは良い指摘です．任意の初期値に対し，$u(x)=c(x)e^{-\gamma(x)}$ の形の解で，その初期値をもつものがあるのだから，もう他にはないわけです．

問．定数変化法の c を x の関数とするのは，やってみた結果だけからそうしたのですか？// この変換はアリなのでしょうか？

答．そうです．試行錯誤の末に見つけた解を見つけるための方法です．いわば,「発見的方法」と言えます．

問．定数変化法の $u(x)=(d+\int_{x_0}^x g(t)e^{\gamma(t)}dt)e^{-\gamma(t)}$ の x_0 には，どの数を入れても同じ解になるのでしょうか？// x_0 は任意の値をとることができるのでしょうか？// x_0 の決定法がわかりません．例題では $x_0=0$ とさらっと書いてあるのですが．// $x_0=0$ としたのは何故ですか？// x_0 の取り方に注意点はあるのでしょうか？

答．x_0 は任意の値をとることができます．どの数を入れても同じ解になります．x_0 を変えても，定積分の積分区間が変わり，ずれるのは定数の分だけなので，任意定数 d にその差が吸収されてしまいます．問題によって，都合のよい x_0 を選んでよいのです．数学で一般的に成り立つ「公式」は，特殊な状況に書き換えても，もちろん成立します．

問． 定数変化法のときに出てきた公式らしきもの $u(x)=(\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\gamma(t)}dt+d)e^{-\gamma(t)}$, d : 定数，ですが，実際の問題を解くときに，これに当てはめて解けばすぐに解がもとめられるのではないでしょうか？

答． 求められます．もちろん公式にあてはめて解いて良いのです．それはともかく，講義では，皆さんに,「公式を導く方法」をまず第一に身に付けてほしい，という意図から，公式にあてはめて解かずに，その解法を具体例を通して繰り返したわけです．公式を丸暗記するよりは，その公式を導く方法を身に付ける方が，結局は応用がきく，見当はずれな間違いを避けることができるからです．ところで，皆さんは，将来，単にマニュアル通りに働く，という立場ではなく，どちらかというと，マニュアルを作る立場や，マニュアルを作ることを指導する立場に立つと予想できます．ですから，数学の学習法に限らず，できれば，公式よりも方法を学ぶ，さらに，方法よりも「方法を発見する方法」を身に付ける，という心構えが大切です．

問． $\dfrac{du}{dx}+u=\sin x$ の解の幾何学的表示はどうなっているのでしょうか？

答． 求めた解のグラフを，(とくに，$|x|$ が十分大きな部分だけでも)，増減表を使って自分で調べてみることをお勧めします．

問． $u(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)+(d+\dfrac{1}{2})e^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+(d+\dfrac{1}{2})e^{-x}$ について，$\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$ は周期 2π の周期関数，e^{-x} は単調減少より，$u(x)$ が周期関数になるためには，e^{-x} の係数が 0 でなければならないから，$d=-\dfrac{1}{2}$ とするのはまずいですか？周期関数どうしの和，積は一般に周期関数にならなく，また，周期関数でなくても和が周期関数になることもあるからなのですか？

答． その通りです．質問にあるように，周期関数どうしの和，積は一般に周期関数ではありません．周期関数でなくても和が周期関数になることもあります．$\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$ は周期 2π の周期関数，e^{-x} は単調減少で，$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$ なので，もし，$d+\dfrac{1}{2}\neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+(d+\dfrac{1}{2})e^{-x}\to\infty,(x\to-\infty)$ となり，周期関数ではあり得ない，というのが，正当な理由付けになります．

問． 納得書の解説の「$\dfrac{d^u}{dx^n}=0$」の一般解は,「$u(x)$ は最高次が $n-1$ 次以下の整関数」ですか？

答． その通りです．同じ意味で,「$n-1$ 次以下の多項式」と言います．

問． 演習問題で $u'+hu=xe^x$ を解くとき，$u=c(x)e^{-hx}$ とおいて解くことはわかりましたが，$-h$ のマイナス符号を消して見やすくするために,「$u=c(x)e^{hx}$」とおいて解くのは大丈夫なのでしょうか？

答． マイナス符号がいやなときは，文字を変えて，$k=-h$ とおく，つまり，$u=c(x)e^{kx}$ とおき，最後に，k を $-h$ に戻すのが紛れがなくてよいと思います．

問． $\dfrac{du}{dx}$ を分数的に扱えることが疑問です．

答． そうです．分数的に扱ってはいけません．あくまで"ひと固まりの記号"です．その上で，分子分母を分けて考える場合には，別々に扱えることを正当化しなければいけません．

問． 単振動方程式の解法の $\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2u}{dx^2}+\omega^2\dfrac{du}{dx}u=0$ が $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2+\dfrac{1}{2}\omega^2u^2\right\}=0$ となるところが，なぜこうなるのか全くわかりません．

答． 式の書き方を変えるとわかるかもしれないので，書き換えると,「$u'u''+\omega^2u'=0$ が $(\dfrac{1}{2}(u')^2+\dfrac{1}{2}\omega^2u^2)'=0$ となる」となります．これはいかがでしょう？

問． 変数分離形方程式の解法で，分数の分け方によって解きにくくなるのはどうすればいいんでしょうか？たとえば，$\dfrac{du}{dx}=3u-u^2$ を解く場合，$\dfrac{1}{3u-u^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u-3}\right)$ とすると，積分して $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{u}{u-3}\right|$ となり，結局は，$\dfrac{u}{u-3}=\pm e^{3c}e^{3x}$ となるので，u の 1 次方程式となりすんなり解けるのですが，もし，$\dfrac{1}{3u-u^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{3-u}\right)$ とすると，積分して $\dfrac{1}{3}\log|u(3-u)|$ となり，その後 $u(3-u)=\pm e^{3c}e^{3x}$ となるため u の 2 次方程式となってしまいます．

答． 良い質問ですね．確かに，$u(3-u)=\pm e^{3c}e^{3x}$ となり，これを解くと $u=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{\mp e^{3c}e^{3x}+\dfrac{9}{4}}$ となり，$\sqrt{\ }$ がついてしまいます．しかし，表現は違いますが，同じ解を表しています．解の表示がなるべく簡単になるように，教科書では，途中の計算を工夫しています．

問． $u=ce^{3x}$ (c 任意定数) のグラフが $x-u$ 平面をうめつくすということは理解できるのですが，x が十分に大きいところでのグラフの密集度と，x が十分に小さいところでのグラフの密集度を比べると，後者の方が前者より密になっている気がします．この考え方はあまり意味をもちませんか？

答． 意味をもたせることができます．たとえば，写像 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x$ は全単射ですが，長さを 2 倍にする写像です．任意の 2 点間の距離は 2 倍になります．今後習う「距離空間」や「測度空間」といった概念を考慮すると正当化されます．

問． 解法を知らなければ，微分方程式を解くことはできないのでしょうか？ // 微分方程式には必ず解法というものは存在するのですか？ // 微分方程式を解く一般的な解法は存在しないのですか？いちいち解法そのものを覚える必要があって大変です．

答． 方程式を解く方法が「解法」なので，それを知らないと，よほどの幸運がない限り解くことはできません．しかし，残念ながら，どんな方程式にも通用するような一般的な解法はありません．また，解法の発見されていない方程式もあります．仕方がないので，具体的に解かないで解の性質を調べる手法もあります．ところで,「解法」つまり,「方程式を解く方法」そのものを覚える以外にとりあえず覚えるものはありません．基本的な解法にはそれほど種類はないので，紹介する解法すべてに馴染むように心掛けてください．それはそうと，今回は (も)，すべての質問には答えていないので,「質問したのに答えが見つからない」という場合には，直接口頭で質問をしてください．ではまた．