

解. 定数変化法で、ひとまず $\frac{dv}{dx} + \alpha(x)u = 0$ とおく点を納得しました. // 変数分離できない方程式を、変数分離形にして、その定数 c のところを関数 $c(x)$ にとり替えて、もとの方程式が解けるということが、数式的に理解できたわけではないが、そうすればできるということがわかり、そのような発想があるということに驚き、書いてみました.

説. こんにちは. 黄金週間はいかがでしたか? さて、解説 (共感, 助言, 説教, 回答) ですが、微分方程式の解法については、何百年もかけて優秀な数学者 (と数理物理学者) が寄ってたかって考えてきたので、いろいろな巧みな解法が知られています. その1つである定数変化法に関して、今日さらに詳しく説明するので、ますます納得してください.

解. $\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} + 2u = 0, u(0) = 1, u'(0) = 0$ の解き方が理解できました. どこでなにが使えるかを常に考えて解く必要があると、あらためて感じました. // u'', u', u の入った微分方程式の解き方がわかりました. // 単振動方程式にあてはめることにより、解くことができる微分方程式があることがわかりました. 少し複雑な微分方程式でも、単振動方程式に変形できるので、単振動方程式の一般解に関する定理 (定理 4) は、ただの三角関数の計算だけなので非常に便利な定理であることがわかりました. // 元の式がきれいな式なので、きれいな解が出ることは予想はつきましたが. // 数学というものは本当に良く出来ていると思われました. // ところで、変換方法は他にありますか? また、違う解法は存在するのでしょうか?

説. 定数係数線形方程式については、代数方程式 (特性方程式) と関連させた解法があります. 後で紹介します.

解. 一度、 $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$ (α : 定数) とおいた上で、有利な値を α に代入するという手法が非常に面白かったです. // 非常に高度に技術的な変形で、無理矢理解ける形にもっていくのは美しいと感じるので、とても好きな解き方です. // しかし、どうして $u = e^{\alpha x}v(x)$ とおくのかはよくわかりません. // なぜ、 $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$ とおくと、微分方程式が解けるかということは納得できませんでした. // 今一步理解できなかった. // なぜ、こうおけるのか、ということと、 α はなぜ適当においてよいのかわかりません (納得書じゃなくてすみません). 別の授業で、単振動のような2階微分方程式は、 $\frac{du}{dx}$ などかけるのがセオリーだと言っていました. もし、そういうものがあるのなら、どのような時に、 $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$ とおけるのか教えてください. // 問題の形を見て、 $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$ とおくことを発見できるかどうか心配ですが... // α という定数の決め方で、嫌な部分を消すことができるのは便利です. // $e^{\alpha x}$ が微分しても $e^{\alpha x}$ の形が残るので、あとで都合がよいので使っていることがわかりました. // $e^{\alpha x}$ という関数は偉大だということを知りました. // なぜ $u = e^{\alpha x}v$ とすると、 $\frac{d^n}{dx^n}u = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n a_k v^{(k)}$, ($a_n \neq 0$), と書けるわけで、両辺を $e^{\alpha x}$ で割ることができるので、 $a_2v'' + a_1v' + a_0v = 0$ となるから、 $a_1 = a_1(\alpha) = 0$ となるように α を選べば、 $a_2 \neq 0$ を考慮して、 $v'' + \frac{a_0}{a_2}v = 0$ となり、 $\frac{a_0}{a_2}$ の正負で、定理 4 あるいは定理 5 が使えるということですね. ($a_0 = 0$ のときは、 $v = ax + b$).

説. 上の納得に補足します. $w(x) = e^{\alpha x}$ は微分方程式 $\frac{dw}{dx} = \alpha w$ の解です. すると $\frac{d}{dx}(wv) = \frac{dw}{dx}v + w\frac{dv}{dx} = \alpha wv + w\frac{dv}{dx} = w(\frac{d}{dx} + \alpha)v$ となります. ですから、 $w^{-1}\frac{d}{dx}(wv) = (\frac{d}{dx} + \alpha)v$ です. つまり、「作用素」 $w^{-1}\frac{d}{dx}w$ (w をかけて微分してから w で割ること) は、 $\frac{d}{dx} + \alpha$ という作用素に等しくなります. つまり、定数 α だけ「ずらす」という意味をもちます. そこで、たとえば、 $\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$ を解く場合なら、 $(\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 2)u = 0$ と書いて、1階微分のところを消すために、2次方程式 $t^2 + 2t + 2 = 0$ を解く時と同じように、1次の係数 2 の半分を引くとよい、ということで、 $\alpha = -1$ が選ばれたと言えます. これがセオリーです.

解. 単振動方程式 $\frac{d^2v}{dx^2} + \omega^2v = 0$ を解くとき、「両辺に $\frac{du}{dx}$ で掛ける」というのは2階微分を1階微分に下げたための上手い方法であると理解しました. // 式変形の仕方を合成関数の微分 $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{du}{dx} \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)' = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$

などから初めてわかりました. // $\frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right\}$ の変形がわかりました. // 今年の物理学 (力学) で、単

振動の方程式 $\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2u = 0$ が出てきたのですが、定理 (結果) の形でしか書かれていなかったため、 \sin, \cos を2階微分しているからつじつまが合うと考えていた程度でしたが、今回、具体的な解き方がわかりました. // 受験勉強で物理をやっていた時、単振動は $u = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ のような形になると聞いたことはありましたが、今回の講義で、単振動方程式を変数分離して、 \arcsin をつかって積分し、これは \sin の逆関数だから、加法定理を用いることによって、上の形になることがわかりました. // 単振動方程式の解が三角関数をつかって書けること、変数分離形に帰着して \sin^{-1} をつかって解くことがわかった. // 今度、試しにこの解き方を試してみようと思いました. // 高校の物理からずっと見ていた単振動も、解き方までは知らず、ただ覚えるだけでした. 予備校で初めて $\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2u = 0$ という形の運動方程式を教えられた時も、「微分方程式には解の一意性があるから、これをみたまものは三角関数だけ」という説明でした. この分野にも面白さを少しだけ感じられた気がします. // 今なら自力で解けそうな気がします. // 式 $u = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ は物理で見たことがある式で、数学と物理がつながっているということもわかりました. // この一般解の求め方は予備校時代に物理の時間に一度やったのを今日思い出し、僕の中で数学と物理が一部分で手を繋ぎました.

説. 実は、この解き方は「保存形」や「ハミルトン力学系」という考え方と関連しています. つまり、 $p = \frac{du}{dx}$ とおいたとき、 $\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2u^2)$ は、いわゆる「ハミルトニアン」とよばれるもので、単振動の方程式は、このハミルトニアンに対する「正準方程式」とよばれるものになります. ハミルトニアンは必ず x に関して一定になるのですが、これは「エ

エネルギー保存則」などと同じような数学的な枠組みにおさまることです。

解. $\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2u = 0 \Rightarrow u = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ (\Leftarrow) は u を微分することによりわかるということ、今まで黒板でやっていたのは、必要条件であって必要十分条件ではないということ、そして、十分条件もちゃんとチェックしなくては本当はいけないのだと思いました。

説. その通りです。でも、解の候補が絞り込まれれば、実際に解になるかどうかを確かめるほうは容易な作業になります。解の候補を発見するほうが難しい。

解. 但し、これは質問になってしまうのですが、そもそも $\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2u = 0$ が一体どうやって導かれたのかがまだ分かりません。もうこれは物理の分野の問題になってしまうのでしょうか？

説. 物理の問題とも言えますが、大切なことなので、後で、この講義でも説明します。(教科書 p.25 - p.28 を参照)。

解. 単振動方程式の一般解が $u(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ で与えられることの証明を通して、 $\frac{d^2v}{dx^2} - \omega^2v = 0$ の一般解が $v(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ の形で与えられることもわかりました。// 解は双曲線関数になりますね。

説. 念のため、計算の途中に出てくる式 $v + \sqrt{v^2 + \frac{2c}{\omega^2}} = c_2e^{\pm\omega x}$ を v について解いてみましょう。 $\sqrt{v^2 + \frac{2c}{\omega^2}} = c_2e^{\pm\omega x} - v$ の両辺を 2 乗して、 $\frac{2c}{\omega^2} = c_2^2e^{\pm 2\omega x} - 2c_2e^{\pm\omega x}v$ を得るので、これを变形すれば、 $v(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ の形になります。

解. 単振動の方程式で 2 階微分のところが 3 階以上になっているも、変数分離にもっていけますか？

説. できません。

解. arcsin の積分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$ は、今までに教科書にのっている問題以外で使ったことがなかったのですが、今日は、単振動という物理で実際にあるようなことを、この積分を使って解くことができたので、使えることがわかりました。

説. よかったですね。皆さんが習った他の公式の使い道も探してみてください。

解. $v'' = 0 \Rightarrow v(x) = ax + b$ は、そうだったなと思いました。

説. では、微分方程式 $\frac{d^n u}{dx^n} = 0$ の一般解は何でしょう？

解. 変数分離形方程式の解き方が理解できました。// しかし、変数を分母に持ってくる前に 0 になるところを気をつけなくてはならない。// $\log|u|$ などが出てきて符号にも気を使うべきであることなどを知りました。// $\frac{du}{dx} = 3u \Rightarrow \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 3$ としてもよいこと。微分方程式の解の一意性のより、 $u(x) = 0$ となる u は $u(x) \equiv 0$ しかないということがよくわかりました。// 初期条件として、 $u(a) = b$ のような式を与えられると、解が一意的に決まる、という感じで理解しました。// まだ、証明もしていないのですが、感覚的には納得できました。

説. 解の一意性はこの講義でも説明します。(教科書 p. 29 - p. 32 参照)。でも、証明は(残念ながら)しません。いずれ専門の講義でも扱われるはずですが、とりあえず、教科書 p.157 - p.159 をぜひ自分で読んで、わからないときは質問してください。

解. 一般に $\frac{du}{dx} = g(u)f(x)$ で、 g, f が連続ならば、 $\frac{du}{dx}$ も連続だから、リプシッツ条件が満たされるのだから g, f が連続とする理由もわかりました。

説. ちょっと待ってください。実は、 $\frac{du}{dx} = f(x, u)$ という形の微分方程式と解の存在と一意性を保証するために、 $f(x, u)$ が教科書の条件 (1.33)(リプシッツ条件) を満たすことを仮定します。したがって、具体的に $\frac{du}{dx} = 3u$ や $\frac{du}{dx} = u^2 - 3u$ なら良いです。一般の変数分離の場合は、積分するためには連続で十分なのですが、変数分離形の解法が正当化されるのは、 $g(u)f(x)$ がリプシッツ条件を満たす場合(たとえば C^1 級)に限ります。

解. 一般解は任意定数の取り方によって色々な形で書けることをを納得しました。

説. 同じものでも、表現の仕方はいろいろあるということですね。

解. 前回 $\frac{u^2}{2} + \log u = x + \frac{1}{2}$ の x に関しての u の極限がよくわからなくて質問書を出しましたが、回答を読んで納得したと思います。同じ考えて、 $x \rightarrow \infty$ のときは、右辺 $\rightarrow -\infty$ で、左辺も $\rightarrow -\infty$ となり、 $u(x) \rightarrow 0$ でなければならないということでもいいでしょうか？

説. その通りです。

解. ようやく「微分方程式」というものの自体に慣れてきた気がします。// 微分方程式で大事なことは、その求めた解を知ること以外に、求めた解が微分方程式で表されるような性質をもつということですね。// 方程式を解く方法はまだまだ数限りなくあると思いますが、習ったことを 1 つ 1 つ理解していきたいと思います。

説. がんばってください。できれば習わないことも自習して 2 つ 3 つ理解してください。

解. 私には「納得」という言葉はまだ使えません。// 納得書だと質問を書きにくく、回答書にも質問の回答という形のもの少なくなるおそれがあるので、質問書に統一してください。// 質問書と納得書を分けずに、自分の好きなことを書けるようにしてほしいのですが ...

説. 納得したことを書いているうちに、納得してないことを質問したくなる、真剣に考えれば考えるほどそうなるのは当然なので、納得書に質問を書いても(質問書に納得したことを書いても)、成績には含まれませんが、もちろん構いません。皆さんの理解度が増すのなら、それで良いわけです。すこしだけ辛抱して新方式とつきあってみてください。

解. 質問書や納得書に書いた内容が、次回の授業の最初に配られるプリントに取り上げられていた場合は、そのときの点数は 0 点ではなかったと解釈してもよろしいのでしょうか？

説. よろしくありません。評価と、この解説書(回答書)にとりあげることは無関係です。まあ、0 点になることは少ないので、がんばって書いて、評価 B をねらってください。ではまた。