微分積分学 III (**微分方程式入門**) **質問の回答** 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ２ (２００２年４月１９日) の分

問． $\dfrac{du}{dx} = 3u$ を解く過程で，$|u| = e^c e^{3x}$ から,「$u \equiv 0$ も解であることを考慮して」$u = c'e^{3x}$ という意味を教えてください．// その前の段階で $\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = 3$ という変形をしているので，$u \neq 0$ はこの時点で前提になっているように思われるのですが．// $\dfrac{du}{dx} = 3u$ から $\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = 3$ とすぐに変形していいのですか？// u が 0 になる点があるかどうかわからないのにすぐに u で割っていいのですか？// $u = 0$ のとき，$\dfrac{du}{u}$ は定義されないのではないですか？// $u = 0$ であることは気にしないのでしょうか？// $u = 0$ の場合はないのでしょうか？

答． こんにちは．今日は４月２６日で，来週の５月３日は祝日で休みですね．次回は５月１０日です．さて，質問の回答ですが，当然の質問ですね．質問してくれるのを待っていました．$u \neq 0$ と仮定して解いています．この部分は,「解法」つまり「解をうまく見つける方法」の説明であり，通常，都合のよい条件を暗黙のうちに仮定して解きます．でも，正確には，次のようにするとよりわかりやすい説明になると思います:「まず，明らかに，$u \equiv 0$ (定数関数) は方程式 $\dfrac{du}{dx} = 3u$ の解である．実際，左辺も右辺も 0 に等しい．解の一意性 (p.29 の定理 12 と，p.157 の定理 8 を参照) から，一箇所ででも $u(x) = 0$ となる解は $u \equiv 0$ に一致してしまう．そこで，0 にならないような解 u を見つけよう...」この説明を加えたあとで，講義で説明した解き方をすれば完璧ですね.「$u \equiv 0$ も解であることを考慮して」ということは，上の説明を省略したので付け足しました．最後に一般解を書く場合は，もちろん，$c' = 0$ に該当する $u \equiv 0$ も仲間に入れます．こうして，c' は任意定数となります．

問． $\dfrac{du}{dx} = g(u)f(x)$ を解くとき，$\dfrac{1}{g(u)}\dfrac{du}{dx} = f(x)$ とするところがしっくりきません．$A := \{x \in \mathbf{R} \mid g(u(x)) \neq 0\}$ という領域においてだけではないですか？それ以外の場所のことは考えなくてもよいのですか？// 例題で $\dfrac{du}{dx} = 3u - u^2$ を $\int \dfrac{du}{3u - u^2} = \int dx$ と変形していましたが，$u = 0, 3$ のときは，分母が 0 になってしまいます．教科書や授業では「$u = 0, 3$ のとき」などの制限をしないでそのまま微分方程式を解いてますが微分方程式を解くときは $\log 0$ や分母が 0 になるときの細かい条件について，とくに考えたりする必要はないのでしょうか？// 初期条件が $u(0) = 0$ の場合や $u(0) = 3$ などのときは，$(3 - u)u$ で割って進めてよいのですか？

答． 正しい指摘です．この場合もやはり，$g(u) = 0$ を満たす定数関数は，解であることがすぐにわかるので，それ以外の解を求める解法です．$\dfrac{du}{dx} = 3u - u^2$ の場合は，$u = 0, 3$ (定数関数) はとりあえず解なので，$u = 0, 3$ 以外の解を見つけているわけです．

問． $\dfrac{du}{dx} = 3u$ を直接的に変形することによって $u = c'e^{3x}$ を得ていますが，これは解の存在を仮定していると思われます．u を任意の解として得られたものだから，この一般解とよばれる $u = c'e^{3x}$ の形しかありえないのですか？これが別の形の解はないことの証明としてよい，と自分は思います．

答． そうです.「解 u があるとすればこうなる」ということですね．正確には「0 の値をとらない解 u があったとするとこの形に限る」ということです．ただし，この場合は，式変形を逆にさかのぼることが可能なので，$u = c'e^{3x}$ が実際に解であることも同時にわかります．

問． 例題などで $\pm e^c = c'$ と置きかえていますが，$e^c \neq 0$ なのに，任意の定数とできるのはなぜですか？// $u(x) = c'e^{3x} \neq 0$ となると，自分では思っていたのですが．// $u \equiv 0$ も解であることを考慮すると，任意定数に置きかえられるのですか？// c が任意定数のとき，$\pm e^{-3c}$ を 任意定数 c' としていましたが，それは良いのでしょうか？// $\pm e^c = c'$ とおいていますが，これは問題ないのですか？

答． 確かに，c が任意定数の場合，$\pm e^c$ の動く範囲は，0 を除くすべての実数になりますから，c' は「任意定数，ただし 0 を除く」ですね．でも，この場合は，$c' = 0$ の場合 (つまり $u \equiv 0$) も含めたいので c' は任意定数としました．

問． $\pm e^c$ を c' をおきかえるところで，$e^c \neq 0$ を考慮して，$u \equiv 0$ が解であることを確かめました．これは，おきかえる両者の範囲が違うかを毎回確かめて，その部分が解としてなりたつかを確かめるべきですか？

答． まったくその通りです．よい指摘ですね．少なくとも自分では，推論にギャップがないか慎重に確かめておくべきでしょう．数学が役に立つ理由の一つは,「解をもれなく拾うことができる」という点にあります．もちろんそれを毎回明示するかどうかは，(煩雑になりすぎる等の理由で) 場合によりますが，なるべく意識するようにすると良いと思います．

問． $u(x) = c'e^{3x}$ のグラフで，縦のラインは連続 (すき間なくうまっている) ですか？$x \to \infty$ にいくにつれて，すき間が広くなると思うのですが，どこまで行っても連続な気もします．

答． どこまで行っても連続です．これが実数の連続性のすばらしい (おもしろい，恐ろしい) 点です．似た例になりますが，数直線を２倍拡大する写像 $x \mapsto 2x$ を考えましょう．この写像は全単射です．２倍にしたからといって「すき間」はできませんね．解曲線も無限に埋まっているので，それがいくら広がっても，すき間はできません．

問． 「解曲線で平面はうめつくされる」と習いましたが，うめつくされる，というのは，すべての平面上の点が解曲線上にあるということですか？

答． その通りです．解の存在定理 (p.29 の定理 12) から，そのことが理論的に保証されます．

問． 教科書 p.6 の注の意味がまだよくわかりません．解の存在範囲を $(-\infty, \dfrac{\log 3}{2})$ に限定していいのでしょうか？// 講義の例題で，なぜ $x \geq \dfrac{\log 4}{3}$ のグラフは書かないのですか？

答． 当然の質問ですね.「解とは何か」「関数とは何か」ということにもかかわる良い質問です．微分方程式の場合，初

期条件が与えられていることが多く，その初期値から，x に関して，前後に延ばせるだけ延ばして得られるものを解と言います．１つの式で表される (この場合は「解析接続される」ということに該当) ものでも，x の動く範囲がつながっていない場合は，別のものと考えるのが普通です．ですから，離れているものは,「別の解」と見なします．

問． 初期条件をつけない場合は解曲線は平面上を覆い尽くすと前回聞きましたが,「$u(x)$ が定義される」領域上をおおうと判断するとよいのですか？

答． 少し違います．すべての解を集めてくれば，平面上全体を覆い尽くすということです．その一方で，解一つ一つの存在範囲については，その解によって x 軸上でいろいろ変わってきます．

問． 微分方程式によって，如何なる初期条件を与えても取り得ない領域などといったものがありますか？

答． ありません．つまり，初期条件 $u(x_0) = u_0$ で，x_0 と u_0 を自由に変えていっても，その条件を満たす解が，(解の存在する範囲は小さいかもしれないが) 存在します．

問． 微分方程式の解は１つに定まるのでしょうか？微分方程式は一般解に初期条件を与えると解が特定されると言いましたが，それは常に唯一つの解なのでしょうか？もしそうなら，解曲線が交わるということはありえないという証明はどのようにするのでしょうか？

答． そうです．p.29 の定理 12 です．証明は，p.157 に詳しく書いてあります．参照してください．

問． 初期条件によって全く違うグラフになることがあることは実際の計算をしてわかりましたが，ここでいう「初期条件」というものは，どのような数学的な意味があるのでしょうか？

答． 数学的には，１本１本の解曲線を特定する，という意味があります．物理的な意味はいろいろありますが...

問． 初期条件として $u(x) > 0$ が与えられたとき，$\log|u|$ を $\log u$ と書けるのでしょうか？

答． $u(x) > 0$ である範囲ではそうです．$u(x)$ が 0 にならないとわかっていれば，連続性から存在範囲上で $u(x) > 0$ となるので大丈夫です．

問． 微分方程式を解く場合に，必ずといっていいほど，初期条件が与えられますが，初期条件の個数はどう決めているのですか？

答． 微分方程式の階数の分だけの条件を与えると解が特定されます．１階微分方程式なら，$u(x_0) = u_0$，２階微分方程式なら $u(x_0) = u_0, \dfrac{du}{dx}(x_0) = p_0$，３階微分方程式なら $u(x_0) = u_0, \dfrac{du}{dx}(x_0) = p_0, \dfrac{d^2u}{dx^2}(x_0) = q_0$，といった初期条件を付けます．

問． 初期条件を少し変えただけで，グラフの形が全くちがってくるので，複雑形の特徴と似ているような気がします．

答． なるほど．でも，初期値に関する不安定性や敏感性という現象であって，解は簡単な式で明示されているので，複雑系でいう「カオス」とは少し異なる現象です．

問． 例題で $\dfrac{u-3}{u} = \cdots$ の段階で c を求めていますが，特別な理由はありますか？

答． 特にありません．計算がすこし楽になるだけです．

問． 微分方程式の一般解は必ず無限個あるのですか？

答． あります．階数の分だけの任意定数を含みます．

問． 一般解は必ず一通りで表されますか？複雑な一般解を２通りに表されたらわかりやすくていいと思ってしまいました．

答． なるほど．一般解の表し方は何通りもあります．とくに線形微分方程式の場合は，解空間の「基底」の選び方によって，一般解の表し方は異なってきます．

問． p.9 の $\dfrac{u^2}{2} + \log u = x + \dfrac{1}{2}$ で，左辺が u に関して単調増加，右辺は x に関して単調増加というのはわかりますが，そのあとの $\lim_{x\to\infty} u(x) = \infty$ とつながりません．

答． 当然の質問です．なるほど難しい箇所です．両辺が単調増加なので，各 x に対して，$u(x)$ がこの等式を通して定まるわけですが，$x \to \infty$ のとき，右辺の $x + \dfrac{1}{2} \to \infty$ ですが，ということは左辺も $\to \infty$ ですが，そうすると $u(x) \to \infty$ でなければなりませんね．$u(x)$ が有界にとどまっていたら左辺も有界にとどまってしまって，$\to \infty$ にはなり得ません．以上のような論法です．

問． 微分の解として出てくるものは，$u(x)$ の値で，今までのように x の値を求めてはいません．微分方程式の解は何を表しているのでしょうか？

答． 関数を表しています．微分方程式で求めるものは関数です．

問． １階微分方程式以外でもたとえば２階微分方程式でも変数分離方程式は使えるのですか？

答． 使える場合もあります．今日，単振動の方程式 $\dfrac{d^u}{dx^2} = \omega^2 u$ を変数分離形にして解きます．でも，一般の２階微分方程式の解法については，少し後で解説する予定です．

問． 未知関数が多変数であるような偏微分の式でも同様の変数分離で解くことは出来ますか？

答． ある１つの変数だけの偏微分だけが関係する方程式なら，他の変数は媒介変数 (パラメータ) だと見なして，常微分方程式として解くことができます．でも，ほとんどの場合，偏微分方程式には，それなりの解き方があります．この講義では扱わない予定ですが，教科書の後の方に偏微分方程式の解法がのっているので参考にしてください．

問． 微分方程式を，積分を使わないで，図形的に解くことは可能なのでしょうか？

答． 不可能だと思います．図形的に考えることは大切ですが，解を求めた後で，その解の性質を調べる場合や，解を求める前に，解があるとすればどんなものだろう，と推理する場合に使います．

問． 講義で $u(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ は微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 u = 0$ を満たすことを示す問題をやりましたが，その事から u について何がわかるのでしょうか？本来，微分方程式を解いて，その方程式を満たす関数を求める事が大切だ，と思っていたのですが，この問は本末転倒な気がします．

答． 微分方程式を実際にみたすことがわかります．もちろん微分方程式を解くことは大切ですが，得られた解が本当にその微分方程式を満たすかを確かめることも大切です．このチェックを怠ると，間違った解をもとに，たとえば役に立たない機械や建物や装置をつくってしまうことになるかも知れないので要注意です．(すこし大げさな表現ですが).

問． 逆に $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 u = 0$ の解は，$u(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ の形になっているのですか？そうでない場合はどういう形になっているのですか？

答． あとで方程式を解いて，実際，一般解がこの形になることを見ます．

問． 「不定積分」とは何ですか？「原始関数を求める」ことですか？

答． そうです．昔から「不定積分」という表現も定着しています．ところで，**「積分」には２種類ある**ことをご存じですか？そうです,「定積分」と「不定積分」です．わかりやすく言うと，定積分は面積や体積をもとめることです．不定積分は微分の逆演算です．まったく関係ない (ように見える) ものですね．歴史的には，定積分の方が先に研究されました．面積や体積を求めることは，身近はことだからです．その後，微分が発見され，さらに，面積や体積を求める定積分が，不定積分を使って計算できることが発見されたわけです．

問． 微分方程式を解くということ = 積分する，という意味内容は何ですか？

答． 一番簡単な微分方程式は $\dfrac{du}{dx} = f(x)$ の形のものです．この微分方程式を解くということはどういうことでしょう？そうですね，$f(x)$ の原始関数を求めることですね．$f(x)$ の不定積分を求めることです．$u = \int f(x)dx$ です．そこで一般の微分方程式の場合も「積分」すると言うわけです．

問． $\int g(u)\dfrac{du}{dx}dx = \int g(u)du$ という式の変形で機械的に計算してしまうのがあまり納得いきません．// 何故ですか？// dx で約分しているということなのでしょうか？// 厳密に言って問題ないのでしょうか？// そもそも，微分を何故 $\dfrac{d}{dx}$ と書くかはわかったのですが，積分を $\int dx$ と書くということがよくわかりません．これがわかれば，解決すると思うのですが．// ちなみに昨年の授業では，とりあえず考えずにやり方だけ覚えるようにと言われましたが．

答． 一度わかってしまったら機械的に計算してよいのですが，はじめから機械的に計算してはいけません．$\int g(u)\dfrac{du}{dx}dx$ は，x の関数で，x で微分したら $g(u)\dfrac{du}{dx}$ になるものを表す記号です．それが定義です．$\int g(u)du$ は u の関数で，u で微分したら $g(u)$ になるものを表す記号です．それが定義です．さて，u で微分したら $g(u)$ になるものを x で微分したらどうなるでしょう？そうですね．$g(u)\dfrac{du}{dx}$ になります．要するに，合成関数の微分法則です．という理由で変形できるのです．単に約分しているわけではありません．１年生のときの微分積分の教科書 (の不定積分の置換積分の項目) をもう一度読んでみてください．ところで，微分積分の教科書は，すべての基礎なのでいつでも読めるように用意しておきましょう．

問． 高校の時に $\dfrac{du}{dx}dx = du$ としても良いと言われて，実際，問題も起きていないが，その記号の意味を考えると，どうも納得できません．// 変数分離形方程式で $g(u)du = f(x)dx$ という書き方はできますか？この方法は間違っていますか？// $\dfrac{du}{dx} = xu$ を $\dfrac{1}{u}du = xdx$ としてはいけないのでしょうか？

答． 実は，$\dfrac{du}{dx}dx = du$ という式は深い意味があるのですが，それはともかく，積分の記号のもとで成り立つと理解してください．上の回答を参照してください．

問． $\dfrac{dv}{dx}$ は dv と $\dfrac{1}{dx}$ に分けられるのですか？

答． $\dfrac{1}{dx}$ というものがありません．あくまで，$\dfrac{dv}{dx}dx = dv$ と書いてください．

問． 高校の教科書で置換積分での $\dfrac{dx}{dt}$ は $dx = fdt$ のように分離することを教えているのに微分方程式の分離は削除されたことを，先生はどのようにお考えですか？

答． 多分，高校では，$dx = fdt$ というのはあくまで積分の記号のもとで許されるということを習っていると思います．削除の事情については知りません．

問． 補足のところで，積分の下端は 0 にしないとダメなのですか？// $\int a(x)dx$ を $\int_0^x a(t)dt + c$ としたのは，$\pm e^c$ を c' にして $c' = u(0)$ としたかったからなのでしょうか？// なぜこのようになるのですか？// この変換がわかりません．// なぜそう置換できるのかよくわかりません．本当は１年で習う内容らしいのですが...

答． 深い意味はありません．0 でなくても，他の値でもよいです．なぜこのようになるかは，１年生のときの教科書を開いて,「微分積分学の基本定理」(不定積分は定積分を使って表すことができる) という項目を読んで復習してください．どんな教科書にも必ず書いてあります．ところで，微分積分の教科書は，すべての基礎なのでいつでも読めるように用意しておきましょう．

問． なぜ $u(x) = u(0)e^{\,{}_0^x a(t)dt}$ が必要なのですか？

答． 公式をいろいろな形に解を表しておくのが数学の一つの役目です．この公式を誰がどんな場面で使うかわからないので，丁寧に表しておきます．画一的だと不親切です．それが「ユニバーサルデザイン」ということですね．

問． 補足の問題で $e^{\,{}_0^x a(t)dt}$ はそのままでよいのですか？

答． よいです．$a(t)$ が具体的に与えれらていないのでここまででよいです．

問． 問１で，$\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$ の解は「x の１次以下の多項式」以外に存在するかどうか気になります．

答． x の１次以下の多項式だけです．この微分方程式の解 u は，$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du}{dx}\right) = 0$ を満たすので，$\dfrac{du}{dx}$ は定数のはずで

す．したがって，u は x の１次式に限られます．

問． $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ はなぜこのように書くのですか？昔から思っていた素朴な疑問です．

答． $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}u$ と書くことがあります．そこで，２階微分を $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}u\right) = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 u = \dfrac{d^2}{(dx)^2}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ と表すというココロです．

問． $u(x) = e^{-x^2}$ という関数はよく見かけます．講義中にも,「統計学等でも出てくる」と言われました．なぜこの関数が特に出てくるのでしょう．

答． わかりません．ところで，この関数の重要性を最初に認識したのはガウスだと思います．

問． $u(x) = e^{-x^{2n}}, (n \in \mathbf{N})$ であれば，グラフの概形は，$u(x) = e^{-x^2}$ と同じようになるのでしょうか？

答． そうですね．増減表を書いてみてください．

問． そもそも関数 $u = u(x)$ というのは新しいことなのですか？見慣れない形なのですが，$y = f(x)$ などと全く同じ式なのですか？

答． 同じ式です．正確に言うと，同じ使い方の式です．

問． u を $u(x)$ と書くと，$u = u(x)$ のようになりおかしいと思うのですが．

答． 関数を f と書いたり，$f(x)$ と書いたりします．変数が x であることを強調するためです．ですから，$f(x)$ は関数自体を表すこともあるし，特定の x でのその関数の値を表します．２重の使いかたがあります．$u = u(x)$ と書いたら,「x の関数 u」と読んでください．

問． 今，数学科の専門科目の勉強についていけなくて困っています．今日の授業のような高校の延長的なことはわかるのですが，このような事が専門のどんな分野につながっているのか，微分方程式の知識はどんな分野で役に立つのかを教えてくれれば，専門の勉強の際に役立つと思うので，ぜひお願いします．

答． すべての分野で役に立ちます．本当です．信用してください．ところで，大学で学ぶことは，すべて高校で習ったことの延長です．専門科目もすべてそうです．高校で習ったことと大学で習うことの橋渡しを自分なりに考えていけば，理解が深まると思います．

問．「グラフの概形を描け」という問題の指示があった場合，どのくらい精密に描けばいいのですか？たとえば，$u(0) = 1$ とかの点と，極限の部分さえわかるように描けばよいのでしょうか？その中間の部分の曲がりぐあい等は考えなくてもよいのでしょうか？// グラフを書く時に増減表はいらないのですか？

答． 場合によります．余裕があれば増減表を書いた方が良いのはもちろんです．でも，テキストの例題の解答程度を書けば良いです．

問． グラフは，点をある程度代入して，ある程度かくのはダメですか？基本に戻って点を代入して，それを何回かやり，グラフを完成させるのはダメですか？

答．「点をある程度代入する」というやり方は，残念ながらお勧めできない方法です．その点はどう決めたのか，何のために微分を習っているのか，ということになります．点を代入するのは，残念ながら「基本」ではありません．**基本はあくまで微分**です．微分を使いましょう．ところで，数値計算では点を代入します．その場合は膨大な計算量が要ります．しかも，その関数の振るまいを微分を使って解析していないと，どのぐらいの間隔で数値を区切ったらよいかもわかりませんね．やはり基本は微分です．

問． 今まで何気なく使ってきた $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftarrow$ などは，言葉で書くよりもわかりやすくて良いのでしょうか？私は，あまりにも多用するのは逆に見えにくいような気がします．

答． 同感です．正式な場所 (論文や企画書など不特定多数が見る場合) では，数学の記号を使うことはなるべく避けるべきでしょう．論理記号は，あくまで省略記号だからです．でも一方で，良く出来ている記号なので，複雑な命題を論理的に解析したり推論したりするのに強力な武器になります．非公式な場 (たとえば数学や論理学の学習の場) ではどんどん使いましょう．

問． 板書はなぜ「解」ではなく「略解」なのですか？自分も板書と同じ様な事を解答のつもりで書きました．自分の思い当たる足りない点は，(1) 日本語 (説明) がたりない．(2) $u(x)$ の微分可能性を論じていない，ですが，(2) は必要なのでしょうか？「明らか」とだけでも書くべきでしょうか？また，試験でこの略解だと減点になるのでしょうか？それなら少しきびしいと思うのですが？

答． 減点にすることもあります．少しきびしいです．この場合，(2) の微分可能性は，微分方程式の解であることから大前提になります．むしろ，(1) の説明不足が問題になります．日本語でも英語でも何でもよいのですが，ともかく説明をつけることをこころがけましょう．たとえば「明らか」だけでは，どう明らかなのか不明なことがあります．明らかでないのに「明らか」と書くと嘘になります．説明できないと，そのことをあまりよく理解していないのでは，と見なされてしまいます．その際，もちろん，何を説明するべきか，という点も問題になります．つまり，**何がキーポイントかということがわかっている．そして，その部分に詳しい説明をつけることができる，ということが理想** です．きびしいですね．

問． なるべく講義内容と関係する質問を，とありましたが，今回の講義内容はわかり易くて質問したいようなことが見つかりませんでした．このような時は，どうしたらよいですか？このようなところに目をつけて質問したらよい，など，何かアドバイスやポイントなどがあったら教えてください．

答．「わかり易い」というのは講義に対するほめ言葉ことばだと思うので，ありがとう．それはともかく，この回答書にある他の人の質問のしかたを参考にするとよいと思います．もちろん，質問に個性が出ますが，この講義と関係することなら何でもよいからわからないことを質問してみてください．**自分でどんどん予習をしておいて，授業を受ける前から質問を見つけておく，授業を聞いてわかったら，その先はどうなるのか，という質問をするくらいの気迫でお願いします**．ではまた．