

微分積分学 III (微分方程式入門) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 1 (2002年4月12日) の分

問．微分方程式はどんな場面で使うのでしょうか？

答．こんにちは．さて，回答ですが，微分方程式はいろいろな場面で使います．代表的なものは，やはりニュートン力学でしょう．ニュートンの運動方程式は2階の常微分方程式ですね．自然の現象は微分方程式で記述されることが多いようです．医学や心理学や，自然科学以外の社会科学，たとえば経済現象なども微分方程式で表されます．いろいろな現象が，それがどういう種類の現象であるかということを超えて，共通の微分方程式を使って調べられるというのは，考えてみると非常に不思議なことですね．それはともかく，将来，誰も発見できなかったような応用が見つかるかも知れません．そして，それを見つけるのは皆さんかも知れません．ですから，どんな場面でも使えるようにしておきましょう．

問．どのような微分方程式をやるのでしょうか？微分方程式と聞くと，物理を思い出します．振り子の問題とか，ケプラーの法則とか熱伝導方程式とか，物理でやっているときは，さっぱり分からなかったのですが，今回の授業はそのような物理など物体に関わることをやるのでしょうか？微分方程式を使った物理の問題などはやるのですか？

答．そうですね．余裕があればもちろん触れる予定ですが，とにかく基本的な微分方程式が具体的に解けるようになる，というのが第1の目標です．ですから，この授業はわかりやすいかも知れません．

問．物理の素養はかなり危ないので，物理の話も含めてわかりやすい講義をお願いしたいです．わがままですか？

答．「わがまま」ではないです．講義時間に余裕があれば物理的な話もわかりやすく説明したいなあと思っています．ところで関係ないですが，なんでも自分の思い通りにしようとするのが「わがまま」で，7割くらいに譲歩すれば「わがなな」と言うのですね．

問．生物の分野でも微分方程式を使うことがあると耳にしたのですが，どのような場面で使うのか想像できません．何か簡単な例があれば教えてください．

答．たとえば「ロトカ・ヴォルテラの生存競争のモデル」があります．肉食動物の個体数と草食動物の個体数の関係を連立の微分方程式で表すモデルです．もちろん生物は物理や化学などと関連しますから，そのような分野では微分方程式を使いますね．

問．最後の一般解を特定するのは慣れなのでしょう？それとも，本当は，いくつかの過程を経て解が決まるのでしょうか？

答．いくつかの過程を経ます．つまり「解法」があります．その解法も，この講義でわかりやすく説明する予定です．

問．実際すべての微分方程式の解というものは，グラフに示されるように無数にあるのでしょうか？具体的な値 ($u(0) = 1$ 等) がなければ，解は1つには決まらないのでしょうか？

答．そうです．無数にあります．具体的な値 (初期値) を決めないと，解は特定されません．

問． $\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} - 2w = 0$ の解曲線が空間をうめつくす，とありますが，疑問を感じました．解は1変数関数になるのに，3次元の空間をうめつくすというのがよくわかりません．連立微分方程式の解曲線の傾きで空間をうめる所がよくわかりませんでした．

答．たしかに解は1変数関数です．そして，解曲線とは， x が動くとき，空間の点 $(x, w(x), \frac{dw}{dx}(x))$ が描く軌跡のことです．1つの解曲線は， x の増加する方向へ流れていき戻ってきません．ですから，1つの解曲線が空間をうめつくす，ということではなく，解曲線がたくさんあって，それらが集まって，空間をうめつくす，ということです．たとえば，太い糸が，多数の細い糸からできている状態や「しめ縄」が「わら」を束ねてできている状態を想像してください．「ホタテの貝柱」を想像してください．そのような状況です．そして，2階の微分方程式は，任意定数が2つの一般解をもち，その2つの数を決めれば，解が1つ特定できます．

問．何故，微分は $\frac{d}{dx}$ という様に書くのでしょうか？

答．微分の定義を思い出すと，微分 $\frac{du}{dx}$ は分数式 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ の極限ですね．だから，微分も分数の形で書くのが自然でわかりやすいわけです． d は differential の頭文字です．

問．「 y' 」を「ワイダッシュ」と読むべきか，それとも「ワイプライム」と読むべきですか？

答．英語で正確には、 y' は y prime なので「ワイプライム」と読むべきですね． y dash なら、 $y-$ となります．でも、国語辞典で「ダッシュ」の項を見ると、 y' の ' という記号のこと、と書いてあります．ですから、(誰が日本でそう読みはじめたかはわかりませんが) 日本語としては「ワイダッシュ」でも正しいと言えます．つまり、どちらでもよい、という結論です．

問．数学はつながっているのに、微分積分の講義を聞いていて、どうしても別の分野の質問をしたくなるのではないかと思います．そしてその中には明らかに授業と関係がうすいものもあるかもしれませんが、そういった質問はすべきでしょうか？それとも別の先生に聞くなり自分で解決するまでもがくなりした方がいいのでしょうか？

答．「数学はつながっている」ということは同感です．数学は1つです．それから「自分で解決するまでもがく」というのも実力を高める良い方法なのでお勧めします．それはともかく、講義を聞いていて、どうしてもその質問に至ったか、という補足説明を詳しく書いてくれれば、どんどん質問書に書いて良いです．

問． $SL(2, \mathbf{R})$ の次元が3であるらしいのですが、難しくて証明ができません．何かヒント的なものをもらえたらと思います．

答．講義内容とあまり関係ないようですが、今回は答えましょう．(次回からは、なるべく講義内容と関係する質問をしてください．関係なさそうな質問の場合は、その質問が講義の内容とどう関係するか補足説明を加えてくださいね)． $SL(2, \mathbf{R})$ は多様体であり、「次元」というのは、多様体の次元という意味です．この場合、その次元は(単位行列における)接ベクトル空間

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x + w = 0 \right\}$$

の次元に等しくなります．このベクトル空間が3次元ということは線形代数の知識でわかりますね．

問．字数制限はない方がいいのでは？授業への関心，理解度を見たいのであれば質問書の内容から読みとるべきなので，字数を定める必要は無いのではないのでしょうか？

答．なるべく詳しく書いてほしい、ということから、あくまで目安として字数の下限を定めています．補足説明を詳しく皆さんに書いてもらうこと自体が、皆さんの勉強の「手助け・手がかり」になると考えているからです．ともかく、黒板の前に立っている「わからずやの老人」にわかりやすく説明するつもりで詳しく具体的に書いてください．

問．「質問書」と「納得書」を分けるより、どちらかを書けばいいようにしてくれるとやりやすいです．

答．なるほど．でも、皆さんには、質問もして納得もしてもらいたいという考えから分けています．あくまで成績評価の対象ですので、バランスを考えて、こちらから指定します．よろしく．

問．次回からどのように書いていいのか全くわからないので、少し例がほしいです．

答．あの、言い忘れましたが、先週配った講義の説明のプリントの裏側に例が書いてあります．参考にしてください．

問．なぜ高等教育機能開発総合センターの教室を使用するのですか？

答．この講義が、共通教育科目だからです．もちろん受講する皆さん全員の便宜をはかるのが理想ですが、もともと2年生対象の講義なのでこの場所で行うのが妥当であると思います．

問．この質問書は講義時間中に書くのですか？間にあわなかったときはどうなるのですか？

答．講義時間中に書いてください．一応、時間の最後の10分程度を質問書(または納得書)を書く時間にあてます．それまでに、講義を聞きながら、これにしようか、あれにしようか、とあらかじめ考えておくと時間的に間に合うと思います．

問．納得書を書けない場合どうしたらいいのでしょうか？講義の内容についていけなくなったりして、内容が理解できなかったときは、納得書を書こうにも書きようがないと思うのですが、そのときにはどうしたらいいのでしょうか？

答．できるだけがんばって書いてください．テストで、問題が理解できなくて、解答を書こうにも書きようがない場合は当然「不可」になりますね．それと同じことで、納得書もテストである、受け身ではなく「能動的なテスト」であると考えて、真剣に書いてください．ではまた．