微分積分１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 5（２０００年６月１２日）の分

問．(積の高次導関数に関する) ライプニッツの公式と２項定理はどうして似ているのですか？そっくりなのにとても驚きました．数学とは不思議で奥が深いですね．

答．奥が深いかどうかは，もうすこし奥に入らないとわからないと思いますが，ともかく驚くということはよいことですね．驚くということは，その人にとって，何か新鮮なことを見い出したということで，視野がそれだけ拡がるということだから．さて，どうして似ているか，その理由ですが，講義で説明しました．それをくり返すと，$(a+b)^n$ を展開するには，a と b を合計 n 個えらび，それらを掛けるということを行う，そのとき，掛ける順序は関係しないから，組み合わせの数 (２項係数) だけ同じ項が得られる，それを係数に書いて，すべての場合を尽くせば，$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k}b^k$ が得られる，ということでしたね．ライプニッツの公式のときはどうでしょうか．$(fg)^{(n)}$ を計算するには，f と g を合計 n 回えらび，選んだ回数だけ微分するということを行う，そのとき，微分する順序は関係しないから，組み合わせの数 (２項係数) だけ同じ項が得られる，それを係数に書いて，すべての場合を尽くせば，$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}g^{(k)}$ が得られる，ということになります．こう考えると，まったく同じですね．まったく同じと本当に思えたら，数学がよくわかっていると自信を持ってよいと思います．

問．($f(x) = e^x x^2$ を 2000 回微分する問題で，) ライプニッツの定理を使わずに，推測して，数学的帰納法で示すことを思いついたのですが，どうでしょうか？

答．もちろんよいです．推測できれば十分ですね．そして帰納法で証明できたらすばらしいですね．でも，ライプニッツの定理も証明しようと思うと，やはり数学的帰納法を使うことになるので，結局同じことをしていることになります．

問．高次導関数を求めて何の役に立つのですか？２次導関数まではわかりますが．

答．日本人が持っている「役に立つことがよいことである」というやや功利主義的な考え方は，東洋４０００年の伝統である，と誰かが書いていました．それはともかく,「役に立つ」ということを広い意味に捕らえて,「他のことと何らかのつながりをもつ」という意味であると解釈すると，役にたつかどうかという問いかけは，ある事を理解するにあたって，それと関連することを通して理解するということになり，これはとても自然な理解の方法であって，したがって重要な問になります．私 (石川) は，皆さんがよく質問する「役に立つか？」という意味は，このような意味だと解釈することにしています．さて質問の高次導関数についてですが，$f(x)$ が (x が時刻を表すとして) 時刻 x での位置を表すとすると，$f'(x)$ は速度を表し，$f''(x)$ は加速度を表し，$f'''(x)$ は加速度の変化 (加加速度？) を表します．もっと情報が欲しい場合はもう一度微分する必要が生じるかもしれません．微分が何の役にたつか，実は，場面場面，問題意識によって変わってきます．微分にいろいろな意味を与えることができます．そしてどんな場面でも役に立ちます．このような数学のもつ性質を「普遍性」とか「汎用性」などとよびます．変なたとえ話ですが，千円札と千円の商品券はどちらが価値があるでしょう？そうですね，どの店でも使える千円札の方が価値がありますね．千円札の方により普遍性があるからです．**いつでもどこでもだれにでも役に立つ**ように (なるべくそういうことを目指して) 数学はできているのです．当座の役に立つか立たないかという目先のことに関係なく，とにかく「できる」ということの方が大切です.「いろいろなこととつながる可能性を秘めている」ということが魅力なのです．数学 (や他の学問) を勉強する理由は，まさにそこにあります．ところで，高校２年では微分は３次関数までしか教えない，ということに現在ではなっているそうですね．もし，それが本当だとすると，それはなぜでしょう？４次関数以上は「役に立たない」からでしょうか？たしかに，３次関数の方が，４次関数より「役に立つ」可能性は高そうですね．でも，数学的には，３次関数の微分も４次関数の微分も同じで，どうして同じようにできるものをわざわざ教えないのか，私 (石川) にはまったく不可解です．

問．ライプニッツの公式はいつでも有用なのですか？この公式が便利なのは $f(x)$ と $g(x)$ のどちらかが微分していく過程で 0 になるときと思えるのですが．

答．なるほど．でも，たとえば，３角関数などのように高次微分に規則性のあるもの (言い換えると，何かある微分方程式の解であるようなもの) には同じ様に使えると思います．

問．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ という書き方ですが，２次導関数は $\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$ と表すことができて，d^2 という書き方が許されるなら $\dfrac{d^2y}{d^2x^2}$ というほうが適切に思えるのですが．

答．ほほう．$\dfrac{d^2y}{d^2x^2}$ という記号は使われていませんが，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は，$\dfrac{d^2y}{(dx)^2}$ のことであると思えばよいようですね．

問．高校の時から「なんで高次導関数は $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ という書き方をするんだろう」と考えていました．

答．質問の補足説明を読みながら回答を書いていて思いついてきたのですが，結局 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n y$ という書き方から来ているのかもしれませんね．

問． 平均値の定理はグラフを見れば明らかなのに，どうして定理になるのですか？

答． グラフで説明して成り立っていても，それはたまたま偶然そのようなグラフについてだけ成り立っているかも知れないので，それが一般的に成り立っているかどうかは保証されませんね．それを保証するのが「定理」というものです．

問． 高校で大学入試勉強をしていた際,「平均値の定理は微分を考える上での要となる」と言われたし，参考書にも書いてあったのですが，ずっとその重要性に気付きません．どのような点で重要なのでしょうか？応用性という観点からですが，原理という観点からですか？あまり高校のときは役に立ちませんでした．

答． 平均値の定理は「要」つまり「土台」であるということは確かです.「ロルの定理」はより基礎となる土台といえます．その土台の上にテイラーの定理という家が立てられ，微分方程式というピアノが運び込まれ，子供がピアノの練習をするのですが，そのとき，家の土台は役に立っていますね．応用されない原理は役に立たないので，(他のこととつながらないので)，これは「応用される原理として重要」ということでしょうか．

問． 平均値の定理はロルの定理の拡張とみてよいのでしょうか？よいとしたら，ロルの定理の存在意義は何なのでしょうか？

答． 拡張です．親の存在意義のようなものです．平均値の定理はロルの定理の拡張であると同時に，ロルの定理から証明されます．

問． $o(h)$ とはどういう意味ですか？

答． 無限小の記号ですね.「h で割っても $h \to 0$ の極限をとったら 0 になる程小さい関数」という意味でしたね．

問． $(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を示すとき，$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ とおき，$\sin y = x, (-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ から，両辺を x で微分し，$(\cos y)y' = 1$, $y' = \frac{1}{\cos y}$ としましたが，$y = \pm\frac{\pi}{2}$ のときに $\cos y$ は 0 になるから，閉区間ではなく，開区間でないといけないと思うのですが．

答． その通りです．よく気がつきましたね．x でいうと，あくまで，$-1 < x < 1$ で成り立つ式ですね．

問． $(a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a})'$ を公式を使わずに，$y = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$ とおき，$x = \sin\frac{y}{a}$ とし，x で微分して求めたら，答えが違ってしまいました．どこが違うのでしょうか？

答． 公式に当てはめるだけでなく，多方面から計算してみるということはよいことだと思います．さて，$y = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$ の意味を思い出すと，$\sin y = \frac{x}{a}$ ですね．$x = \sin\frac{y}{a}$ ではありません．

問． 逆３角関数はどういうときに使われますか？

答． 積分するときに必要になります．

問． $y = |x|$ のグラフに極限なしで，微分できないということですが，極限は 0 になって存在する気がするのですが．

答． 極限とは，$\lim_{h\to 0}\dfrac{|a+h|-|a|}{h}$ のことで， $a = 0$ のとき，この極限が存在しない，という意味です．微分の定義を思い出しましょう．

問． $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ について，$f^{(n)}(0)$ を求めるとき，$f^{(n+2)}(0) + n(n+1)f^{(n)}(0) = 0$ で，$f^{(n)}(0) = a_n$ として数列にするのですが，その一般項の求め方がわかりません．

答． $a_{n+2} = -n(n+1)a_n$ だから，a_0 がわかれば，順々に a_n (n が偶数) が求まり，a_1 がわかれば，順々に a_n (n が奇数) が求まるということです．

問． $x = t^2, y = 2t$ の微分の説明で，講義で $t = \sqrt{x}$ としていますが，t は正になるのですか？

答． よく気がつきましたね．$t = \pm\sqrt{x}$ とすべきでしたね．ここでは，$t > 0$ としたと考えてください．

問． なぜ $\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ というように普通の分数式のように計算できるのですか？これは高校以来の謎です．ふつうに計算できて便利で，別に受験にはなぜこうなるのかを知らなくてもやってこれたのですが，分からないまま終わるのもいやなので解明したいと思います．

答． がんばってください．合成関数の微分法則については，教科書に証明が載っています．私 (石川) は受験勉強にももちろん意味があると思います．その意義を認めた上で言うと，**受験勉強のときに失われかねない，理解したいという人間の尊厳を回復する場所が大学である**ということになるのでしょうか．

問． $\dfrac{dy}{dx}$ などの記号は分数扱いでいい，と聞いたことがあるのですが，全く分数扱いでいいのですか？

答． $\dfrac{dy}{dx}$ は分数と思わず，あくまで「形式的な記号」と思った方がよいと思います．それを押さえておかないと，一生微分がわからなくなる (あるいは，わかったつもりで一生を終えることになる) と思います．微分の定義から分数の極限であるとは解釈されますが，極限が何かの分数と考えるにはギャップがありますね．それはともかく，微分の定義をキッチリ押さえたあとでなら，積分のときに使う $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$ という書き方をすれば，微分の記号を分数と解釈することもできます．たとえば，$y = x^2$ のとき，$d(x^2) = 2x$ と書き，$\dfrac{d(x^2)}{dx} = 2x$ とするのです．でもこれは，微分がよく分かってからの話であって，これで，$\dfrac{dy}{dx}$ がわかるようになるわけではないですよね．ではまた．