微分積分１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ４ (２０００年５月１５日) の分

問． $\lim \log f(x)$ と $\log \lim f(x)$ は等しいのですか？高校の時，先生から $\lim \log f(x)$ は $\log \lim f(x)$ と等しいと考えろ，と言われたのですが，納得できません．

答． $\lim_{x\to a} \log f(x) = \log \lim_{x\to a} f(x)$ ということですね．これは，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$ ならば成り立ちます．その理由は，対数関数が連続だからです．連続という条件は，言い換えると,「極限と順序を入れ換えてもよい」条件になります．

問． $y = a$ (a： 定数) に最大値，最小値はありますか？

答． あります．最大値は a で最小値も a です．

問． 中間値の定理はどういうときに使いますか？

答． 方程式 $f(x) = 0$ をとくとき，$f(x)$ が連続であって，$f(a) < 0, f(b) > 0. a < b$ なら，a と b の間に少なくとも解が１つ存在すること，$f(c) = 0, a < c < b$ となる数 c が存在することがわかります．解は求まらないけれど，解の存在がわかります．たとえば，３次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の存在が証明されます．($\lim_{x\to\infty}(x^3 + ax^2 + bx + c) = +\infty, \lim_{x\to-\infty}(x^3 + ax^2 + bx + c) = -\infty$ なので)．

問． $y = x^2$ $0 \leqq x < 1$ において，最小値は 0 最大値は 1 としてはだめですか？

答． 最小値が 0 なのはよいですが，$0 \leqq x < 1$ の範囲では，$y = 1$ にはならないので，1 が最大値とは言えません．最大値はありません．

問． もし閉区間でないなら「最小値がない」というのは一概に決められないと思います．

答． その通りです．講義でやったのは,「最小値があるとは限らない」という説明です．

問． 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $x = 0$ 以外で連続な関数であるというのは理解できますが，$x = 0$ での値を定め連続であるように拡張できることを示す，ということがわかりません．

答． $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は，あくまで $x \neq 0$ の場合に考えられる式で，$x = 0$ については意味のない式ですね．ですから，そのままでは，$f(0)$ は決められていないわけです．そこで，$f(0)$ を改めて 1 と定めてあげると，$f(x)$ は，$x = 0$ の場合も定まっていて，しかも，$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ が成り立ち，$x = 0$ でも連続になる，そういうことを意味している文章です．

問． 逆関数の定義がよくわかりません．

答． たとえば，$y = \sin x$ は，x に対して $\sin x$ を対応させる規則を表しています．その逆の対応を逆関数と言います．つまり y に対し，逆に $y = \sin x$ となる x を見つける，ということです．ただし，そのためには，y の範囲 (この場合 $-1 \leqq y \leqq 1$) を決め，また，x の範囲 ($-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, 主値という) を決めなくてはなりません．このとき，記号で，$x = \mathrm{Sin}^{-1} y$ と書き，サインインヴァースとか，アークサインなどと呼びます．

問． $y = f^{-1}(x)$ の -1 は歴史的にどうしてこの記号を使うようになったのでしょうか？

答． 逆数は，通常の数の積に関する「逆」ですね．つまり，$a \neq 0$ について，$ax = 1$ となる数を a の逆数とよび $\frac{1}{a}$ とか，a^{-1} と書きますね．逆関数は，ふつうの積 (かけ算) ではなく，写像の合成という「積」に関する逆です．関数 $z = g(y)$ に式 $y = f(x)$ を代入すると，$g(f(x))$ という式になりますが，これを，$(g \circ f)(x)$ と書き，f と g の合成関数と呼びます．逆関数について，$(f^{-1} \circ f)(x) = x, f \circ f^{-1}(y) = y$ が成り立ちます．このことは，$f^{-1} \circ f = 1, f \circ f^{-1} = 1$ と表します．ここで，1 は $y = x$ という関数 (恒等写像) を意味します．こんなことから，逆数と同じ記号を使うわけです．でも逆数ではないので注意しましょう．たとえば，$\mathrm{Sin}^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ とは**ちがいます**．

問． 関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ のグラフが $y = x$ について対称であることは知っていますが，その証明をしろと言われるとできません．きちんと証明できるのですか？

答． できます．$y = f(x)$ を書き換えたのが，$x = f^{-1}(x)$ なので，グラフはそのままになります．そして，x と y を入れ換えたものが，$y = f^{-1}(x)$ なので，x と y を入れ換える，$(x, y) \mapsto (y, x)$ という直線 $y = x$ に関する対称変換で，グラフが写りあうというわけです．

問． 逆３角関数を考える意義というのは何ですか？

答． 簡単な式 (有理式) を積分するときに，逆３角関数は絶対必要になります．

問． なぜネピアさんは $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$ とおこうと考えたのですか？すごく不思議です．

答． ネピアさんのことは個人的には知らないのですが，たぶん，微分と関係する式 $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ が 1 になるような数として，$a = e$ が重要なので，自然にそこに行き着いたというところでしょうか．

問． $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ は，$f(x) = e^x$，$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$ と求めてもよいですか？

答． なるほど．微分の定義ですね．そこに気がついたことはすばらしいですが，論理的な順序から言うと逆です．これから，$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ ということを使って，$(e^x)' = e^x$ ということを導いていくので，e の定義にもどって，$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ を示さないと，循環論法におちいってしまいますね．

問． $y = e^x$ のことを $y = \exp(x)$ と書くそうですが，何と読むのですか？

答． エクスポネンシャルです．指数関数は exponential function と言います．

問． $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n}) \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}(1-\dfrac{1}{n+1})(1-\dfrac{2}{n+1})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n+1})$ の変形がわかりません．

答． まず，$1 - \dfrac{1}{n} < 1 - \dfrac{1}{n+1}$ などから，それぞれの k について，$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n}) \leqq (1-\dfrac{1}{n+1})(1-\dfrac{2}{n+1})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n+1})$ ですね．それから総和の記号のところに注目すると，後の式だけに $k = n+1$ の項があり，その項はやはり正だから，結局，後の式のほうが前の式以上になるという評価です．

問． なぜ，$e = \Sigma_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ と表されるのですか？

答． あとで説明する「テーラー展開」からわかります．

問． log はなんでこんな 10 g とまちがえるような記号を書くのですか？むかし 10 g とまちがえて笑われました．

答． ユーモアがあって楽しい質問 (ネタ) ですね．この“稼業”(数学) を２０数年 (?) やっていますが，全然気が付きませんでした．log は logarithm (対数) の最初の３文字ですね．しかし，自然対数は，$\log x$ の他に，ソビエトや東欧などでは，$\ln x$ と書くようです．最初にそれを知ったときには，世界は広いと思いました．関係ないですが，数字の 7 の書き方もいろいろあるようです．

問． $a^0 = 1$ となるのはなぜですか？

答． 指数法則 $a^{x+t} = a^x a^t$ がなるべく広い範囲の x, t に対して成り立つようにしたいというのは自然な欲求でしょう．とくに $x = 1$，$t = 0$ の場合に指数法則を仮定すると，$a = aa^0$ となりますね．いま，$a \neq 0$ とすると，$a^0 = 1$ としなけらばならないことに気が付くと思います．

問． $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ がどんな関数になるかがわかりません．

答． x を決めると，$x^{2n} = (x^2)^n$ は公比 x^2 の等比数列なので，x の範囲によって，x^2 が決まり，収束したり発散したりするかがわかります．($x^2 < 1$ のとき $(x^2)^n$ は 0 に収束，$x^2 = 1$ のとき，1 に収束，$1 \leqq x^2$ のとき，∞ に発散．)

問． 無限小がどういう意味があるのかわかりません．

答． 具体例で説明しましょう．x が非常に小さい数のとき，x と x^2 と x^3 の「小ささ」を比べることは，とても大切なことですね．将来的には即座に判断できるようになることが理想です．それはともかく，たとえば，$x = 0.01$ とすると，$x^2 = 0.0001$ で，$x^3 = 0.000001$ ですね．このとき，もちろん $x^3 < x^2 < x$ なのですが，それ以上に,「小ささの度合い」がまったくちがいますね．そのことを $x \to 0$ のとき，x は１位の無限小，x^2 は２位の無限小，x^3 は３位の無限小と表現するわけです．

問． $\dfrac{1}{1+x}$ を $1-x$ で近似したときの誤差とはどういう意味があるのですか？２位の無限小になったから誤差が小さいとでも言うのでしょうか？

答． $\dfrac{1}{1+x} - (1-x)$ のことです．たとえば，$x = 0.01$ のとき，$\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1.01} = 0.99099\cdots$ と $1-x = 0.99$ との差のことです．ちなみに，公式 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$ も思い出しておきましょう．えーと，２位の無限小になったから誤差が小さい，良い近似と言いたいわけです．

問． $1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ というところがわかりません．

答． 公式 $1 + r + r^2 + \cdots r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ で $r = \dfrac{1}{2}$ としました．

問． 問題の解答の解説では，答えよりも，先生が答えを導くのに考えた過程をもっと説明してほしいです．ただ，こうなるというのではなく，こういう結論にしたいから，このような式変形を行った，といったような理由付けがもう少しほしいです．

答． なるほど，もっともな意見ですね．努力します．努力しますが，あまり楽屋裏を見せたくない，スマートな解法を説明したい，それをどう解釈するかは個人個人が自由にやればよい，行間は個人が埋めればよい，美しくなければ数学でない，などというようなこだわりもあって，噛み砕いた解説をすることに少しだけ抵抗を感じるのも事実です．私 (石川) も古い人間なんでしょうか．ところで，最近，細野真宏著「経済のニュースが面白いほどわかる本」という本を眺めています．この著者は，高校数学のわかりやすい解説本を書くことで有名な人ですが，この本も非常に丁寧な説明をしていてわかりやすい良い本ですね．常々，私 (石川) は物事を一面的に見ることは良くないと思っているので，辛口の批評も付け加えておくと,「何も考えなくてもわかった気になる本」とも言えます．とは言っても,「大学数学が面白いほどわかる本」というのがあってもよいかもしれませんね．

問． 定理などの証明は自分でできるようにならないといけませんか？

答． いけなくないです．証明が納得できればそれで十分です．数学は人類が何千年もかけて築いた芸術品です．歴史の盛衰の中を脈々と生き延びてきた数学という文化的遺産を，現代の喧噪からのがれて，この機会にじっくり鑑賞してもらえればよいわけです．なんてね．ではまた．