微分積分１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １ (２０００年４月２４日) の分

問．「$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」の証明の流れがつかめません．

答．数列 $\{|a_n|\}$ と等比級数を比較するというのが基本的な証明のアイディアです．$\beta = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ とおくと仮定から $\beta < 1$ ですね．何でもよいから，$\beta < r < 1$ となる数 r をとります．このとき，十分大きな番号 n_0 から先の n についてはずっと，$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r$ ですね．$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ で，$|a_n| > 0$ だから，$|a_{n+1}| < r|a_n|$ が成り立ちます．このことから，$0 < |a_n| < r^{n-n_0}|a_{n_0}|$ がわかります．ここで，$|a_{n_0}|$ は n に関係しない定数であることに注意しよう．$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ は当然で，$\lim_{n\to\infty} r^{n-n_0}|a_{n_0}| = 0$ なので,「はさみうちの原理」から，$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ がわかり，結局 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ がわかるという流れです．

問．$r = \frac{\beta+1}{2}$ とおきましたが，別の数においてもよいですか？

答．はい．$\beta < r < 1$ であれば何をとってもよいのです．

問．$-1 < r < 1$ ではなく $0 < r < 1$ ではないですか？

答．$0 < r < 1$ であり，したがって $-1 < r < 1$ です．何も問題ありません．ここでは等比数列の収束に関する結果 (p. 6 例 1 (3)) を使うためにわざとそう書いたわけです．

問．$|a_{n+1}| < |a_n|$ から $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ ということで証明できると思うのですが.

答．残念ながらできません．たとえば，$a_n = 1 + \frac{1}{n}$ の場合，$|a_{n+1}| < |a_n|$ ですが，$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ ではありません．

問．$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{n+1}\right| < 1$ というのは，$n = 1, 2$ のときは成り立たなくても，n を限りなく無限大にもっていったときに $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{n+1}\right| < 1$ が成り立てばよいのであって１つ１つの数において常に成り立たなくてもよいということでしょうか？

答．その通りです．

問．$a_n = (-1)^n$ のときどうして「発散」と言えるのですか？「振動」というのはわかりますが,「発散」という言葉には結びつかないと思います．

答．なるほど．でも，ここで「発散」という言葉は，収束しないという意味である，と定義しています．その定義にのっとって,「発散する」というわけです．日常的な用語と，数学用語は，同じ言葉でも少し意味あいが違う場合があります．つまり同音異義語と思ってよいかもしれません．ですから，あくまで数学的な意味で使っていることに注意しましょう．

問．$0.9, 0.99, 0.999, \dots$ という数列の一般項を式で表すとどうなりますか？

答．$a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ です．

問．$0.999\cdots = 1$ と等号で結んでよいのですか？数学的に厳密には違うものになるような気がします．$0.999\cdots \to 1$ というふうに書かなくてもよいのですか？

答．なるほど，気持ちはわかりますが，$0.999\cdots$ は $0.9, 0.99, 0.999, \dots$ という数列の極限値という意味なので，$0.999\cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$ となるわけです．

問．$0.\dot{9}$ という書き方ならば納得します．

答．なるほど，でも，$0.\dot{9}$ と $0.999\cdots$ は同じ意味で使います．$0.999\cdots$ の $\cdots$ は 9 が無限に並ぶという意味です．

問．$a_n \leq b_n$ のとき $\alpha < \beta$ について，$a_n = n, b_n = n^2$ などのとき，$\alpha = \infty, \beta = \infty$ となりますが，$\infty \leqq \infty$ というような書き方はよいのでしょうか？

答．あまり良くありませんね．講義で述べたのは，収束するとき，つまり，極限値 α, β が実数として定まることを，あくまで前提にしています．

問．ある数 n 以上で $b_n < c_n$ が常に成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ としてもよいのですか？c_n がめちゃくちゃ複雑で，極限を調べることができないときに，$b_n \to \infty$ が証明できれば，$c_n \to \infty$ としてもよいのですか？

答．よい質問ですね．その通りです．講義では説明しませんでしたが,「ある数 n 以上で $b_n < c_n$ が常に成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ 」は正しい命題であり，証明することができます．

問．$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \alpha$ (α ：実数) となる時，$\lim_{n\to infty} a_n = 0$ ならば $\lim_{n\to infty} b_n = 0$ と高校のとき教わりましたが，なぜ $\lim_{n\to infty} b_n = 0$ なのか完全に納得していません．

答． $\dfrac{b_n}{a_n}$ が α に収束するから，$\dfrac{|b_n|}{|a_n|}$ は $|\alpha|$ に収束するので，十分大きな番号から先ではずっと $|\alpha|-1<\dfrac{|b_n|}{|a_n|}<|\alpha|+1$ という範囲におさまっていますね．(ここで，幅が 2 の範囲をとりましたが，有限の幅なら何でも構いません．) ですから，各辺に $|a_n|(>0)$ を掛けて，$(|\alpha|-\varepsilon)|a_n|<|b_n|<(|\alpha|+\varepsilon)|a_n|$ がわかります．ここで，$n\to\infty$ としたときの極限を考えると，左辺と右辺は 0 に収束します．ですから，教科書の定理 1.1 (2) (はさみうちの原理) により，中辺も 0 に収束します．つまり，$|b_n|$ が 0 に収束することがわかり，b_n が 0 に収束すること，すなわち，$\lim_{n\to ^infty} b_n=0$ が示されますね．

問． $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ というのは，発散しているのにどうしてこう書くのですか？

答． 確かにおかしいのですが，こう書くのが慣習です．

問． どうして $0!=1$ になるんですか？

答． そう決めるということです．$0!=1$ ときめると都合がよいからです．

問． とび階乗はどういう時に使いますか？

答． たとえば教科書 p.94 練習問題 2.1 の問 6 (3) の解答を見て下さい．

問． なぜ実数の数列だけに限定するのですか？複素数でも極限は考えられると思います．

答． するどいですね．実数列が基本だからです．実は，複素数列の極限は，その実部と虚部を考えればよいので，実数列の扱い方を十分理解していれば大丈夫だからです．

問． α が一般の実数のとき $\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}$ を $\dfrac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$ と書いてはいけないのはなぜですか？

答． $(\alpha-k)!$ の意味がはっきりしていませんね．

問． $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ は，m 個のものから n 個のものを取り出す組み合わせの数なのに，m のところに分数などが入ることは一体何を意味しているのですか？

答．「記号の一般化」です．単に計算式 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ をみると，n は自然数でなくてもこの式を使って定義できますね．そこで,「組み合わせの数」と言う意味は考えずに，同じ記号を，より一般的な場合に使用しているわけです．

問． 高校で習った範囲で，$y=(-1)^x$ のグラフとして波形の曲線がのっていたと思います．実際に，$y=0$ になることはあるのですか？また，実数の範囲では，$x=\dfrac{1}{2}$ などでは成り立たないのではないでしょうか？

答． 高校で，$y=(-1)^x$ のグラフを習ったというのは君の勘違いだと思います．実数 x に対し $(-1)^x$ を定義するのは難しい問題です．質問にあるように，実数の範囲ではなく複素数の範囲で (多価関数として) なんとか考えることができるものです．

問． $\sqrt[n]{\text{定数}}\to 1(n\to\infty)$ はどうしてですか？

答． $c>0$ を定数としたとき，$\sqrt[n]{c}$ は，n 乗したら c になる正の数のことですね．また，$c\leq 1$ の場合に証明しておけば，よいですね．さて，もし仮に,「$n\to\infty$ のとき，$\sqrt[n]{c}$ が 1 に収束しない」とすると，ある正の数 ε があって，無限個の n に対して，$1+\varepsilon\leqq\sqrt[n]{c}$ となるはずですね．すると，$(1+\varepsilon)^n\leqq c$ となりますが，左辺は ∞ に発散するので，矛盾が生じます．したがって，$\sqrt[n]{\text{定数}}\to 1(n\to\infty)$ が示されます．あるいは，$1+\frac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c}-1+n}\leqq\sqrt[n]{c}\leqq 1+\frac{c-1}{n}$ という不等式で「はさみうち」すれば証明できます．

問． 質問がない時はどうすればよいのですか？

答． ひねり出してください．

問． 質問を書かないと，書いた時より評価が下がるのはなぜですか？自分で予習をしたために授業中に質問することがなかった人よりも，予習をせずに授業でわからないことがあり，それを質問した人のほうが，なぜ評価されるのですか？

答． 予習をしたために質問することがなくなる，ということはないと思います．逆に，勉強すればするほど疑問はわいてくるもんじゃないかな．しかも，勉強したあとでの疑問はとてもレベルの高い疑問になってくるはずです．これはわかった，これもわかった，でも，こういう場合はどうなのかな... ああそうか，じゃあ，その先はどうなるんだろう... という具合です．ですから，勉強すればするほど良い質問が浮かんで，しかも良い説明が書けるから評価が上がる，という仕組みになっています．予習中に思い付いた疑問で，講義を聞いて解決した場合は，そう説明に書いてくれれば大丈夫です．ところで，質問とは関係ないですけれど,「授業」という言葉は，私 (石川) はあまり好きありません．というのは，業 (?) を「さずける」「さずかる」というのは，一方的な知識の伝授という感じがするからです.「講義」の方が，大人同士の知的格闘技という感じがして好きです．ではまた．