数学Ｄ質問の回答　担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ３ (１９９９年１１月１９日) の分

問． 重積分のときの図の書き方がよくわかりません．たとえば，$D: a \le y \le x \le 1$ の図が分かりません．

答． 重積分を計算するときには，積分域の図示は不可欠です．そうしないと積分する範囲がはっきりしないからです．また，変数変換 (置換積分) するにしても，どう変換すれば良いか思い付かないからです．では，領域 $D: a \le y \le x \le 1$ を図示するにはどうすればよいか．不等式が３つあるから，その３つの不等式を分けて，$a \le y$ かつ $y \le x$ かつ $x \le 1$ と考えると，３つの直線 $y = a, y = x, x = 1$ で囲まれた３角形であることがわかります．

問． ヤコビアンとは何ですか？ヤコビアンは，僕が思うに，変数変換を行った際に生じるズレ・ゆがみ，などを単に補正・修正するだけのものの様な気がするのですが．そんなたいそうな名前を付けられると，かえって難しく考えてしまうのですケド…

答． ヤコビアン (Jacobian) は，変数変換 $x_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ldots, x_2(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ に対し，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

で定義されます．つまり，偏微分して行列を作って，その行列式をとったものです．偏微分は，他の変数を一旦固定して微分することだからわかりますね．行列式は，歴史的に，連立１次方程式の解を求めたり，面積や体積の計算のために，かなり古くから考えられてきたものです．一般的な定義はここでは差し控えますが，講義でやったのは，$n = 2$ の場合で，x_1 が x で，x_2 が y で，t_1 が u で，t_2 が v で，

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

です．ここで，x_u は偏微分 $\frac{\partial x}{\partial v}$ の別の書き方でしたね．ヤコビアンを頭文字をとって，J と書きました．３重積分の計算を説明するとき，$n = 3$ の場合にふれる予定です．ヤコビアンという名前は，名前をつけないと，説明できないので名前をつけているだけで，別に難しくするためのものではありません．気楽に考えてください．まあ，質問にあったとらえかたは良いと思います．重積分の補正部分ですね．でもそれがこのようにはっきり書け，誰でも計算可能であるということが大切なわけです．

問． ヤコビアンは人名ですか？

答． ヤコビ (Jaboci, 1804–1851) という 19 世紀の大数学者の考えたものなのでこう呼びます．似たような数学用語に，ハミルトニアン (Hamilton → Hamiltonian)，ラグランジアン (Lagrange → Lagrangian)，ロンスキアン (Wronsky → Wronskian)，ヘッシアン (Hesse → Hessian)，グラスマニアン (Grassmann → Grassmannian)，オテモヤン (Otemo → Otemoyan これはうそです) などがあります．皆さんもいずれどれかにお世話になることでしょう．

問． ヤコビアンの記号が，講義では，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ で，教科書では，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v)$ となっていますが，どちらでもよいのですか？

答． どちらでも良いです．ヤコビアンの定義は，$x_u y_v - x_v y_u$ です．x_u, y_v, x_v, y_u は (u, v) の関数ですから，ヤコビアンも (u, v) の関数です．教科書では，その点を強調して，あとに (u, v) を付けただけです．

問． 重積分の変数変換で，ヤコビアンに絶対値がつくのはなぜですか？

答． 付けないと，積分の結果の符号が違ってきます．たとえば，変数変換として，x と y を入れ替える場合，(混乱しないように大文字で書いておくことにして)$x = Y(x, y), y = X(x, y)$ とおくと，ヤコビアンは，$Y_x X_y - Y_y X_x$ ですが，区別のために記号を変えただけなので，$Y(x, y) = y, X(x, y) = x$ であり，$y_x x_y - y_y x_x = -1$ となります．しかし，面積の計算で，x と y を入れ替えて変わってしまうとこまるので，$|-1| = 1$ と絶対値をつけるわけです．つまり，$dxdy$ も $dydx$ も変わらないようにするためです．

問． ★重積分で，置換積分のようなものがあるとのことですが，では，部分積分はできますか？

答． 直接はできません．しかし，講義で説明したように，重積分は，普通の積分をくり返し計算すれば求まり，それぞれの積分のステップは，普通の定積分だから，そこでは部分積分の方法を適用できるわけです．

問． 教科書 p.50 例 2 の $I = \int\int_K y \cos(xy) dxdy, K = [1, 2] \times [0, \pi]$ の計算を説明してください．また，連続とはどういう意味ですか？

答． 連続とは，グラフが切れていないということです．教科書でいうと，数学 A の「微分」の中の偏微分のところに定義が書いてあります．まあ，それはよいとして，例 2 は累次積分で計算しています．まず y で積分してから，その後で x で積分します．y で積分する際，x は固定されているので，x はあたかも定数で

あるように扱います．この段階で，部分積分を使っているのですが，あくまで，y が変数であり，x は定数なので，微分も偏微分を使っています．そして $\cos(xy)=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)$ ということを使っています．それで長々と計算したあと，今度は，x で積分してから，y で積分して計算しています．計算結果は同じですが，あとの計算の方が楽ですね．このように，累次積分の順序は入れ替えることができること，しかも，計算量は異なるということを，この例で示しています．

問．「境界上１対１でない」「$J=0$ となる集合の面積が 0」の意味を詳しく教えてください．

答．極座標を例にとって考えましょう．変換の式は $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ です．r,θ が新しい変数です．このとき，xy 平面で，領域 $D=\{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$ を考えると，これは，単位円の４分の１ (第１象限の部分) ですが，対応する $r\theta$ 平面の領域は，$E=\{0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ にとることができます．そして，D 上の積分を，E 上の積分で計算するわけですね．このとき，ヤコビアンを計算して，$dxdy=rdrd\theta$ とおくのは講義で説明した通りですが，実は，領域 E と領域 D の対応を良く見ると，E の $r=0$ の部分の線分が，D では１点 $(0,0)$ に写って (移って) いますね．異なる点が同一の点に写ってしまうことはない，というのが１対１という意味です．ですから，この場合は１対１ではないんです．でも，その現象が起きているのは，境界上だけですね.「境界上１対１でない」わけです．また，ヤコビアンは r ですが，$r=0$ となる部分もありますね．この例では，その部分も，E 上の $r=0$ の部分の線分です．その面積は 0 です．線分の面積とは何でしょう？講義で説明したように，面積とは，その図形を囲む長方形をとり，それを細かく分け，図形と共有点をもつような「小長方形」の面積を足して，その値の，分け方を細かくしていったときの極限というようなものでしたね．考えている図形が線分の場合，長方形の分割を細かくすれば，線分と共有点を持つ小長方形は，その線分に少しだけ幅を持たせた部分だけにあり，小長方形の面積の和は，その幅の狭い細長い長方形の面積になりますね．そして，分け方を細かくすればするほど，幅がどんどん狭くなるので面積は 0 に近づきます．線分の図形の面積は，その極限だから，面積は 0 です．というわけで,「$J=0$ となる集合の面積が 0」です．それでも，変数変換して計算して，正しい結果が出るよ，ということです．

問．１次変換のところで，領域 D が平行四辺形になるのはなぜですか？

答．講義の説明が不十分でしたね．領域 E の方を長方形にとってあげると，それが写される領域が平行四辺形になる，という意味です．では，１次変換で，長方形が平行四辺形に写るのはなぜか？長方形の辺が，一般には斜めの辺に写るのですが，平行は辺は平行な辺に写ります．このことは１次変換であるということからわかります．したがって，長方形は，２組の平行な２直線で囲まれた平行四辺形になります．

問．★重積分において，連続関数ではない関数はどうやって計算するのですか？

答．補足説明にあるように，連続な部分に分けて重積分してから，足せばよいわけです．

問．教科書 p.31 の問題 2(2) のカルディオイドの長さの計算で，なぜ，積分区間を 0 から 2π ではなく，$-\pi$ から π としないと計算できないのですか？

答．$f(\theta)^2+f'(\theta)^2=4\cos^2\frac{\theta}{2}$ までは良いですか？ここでルートをとるとき，$\cos\frac{\theta}{2}$ の符号が問題になりますね．積分区間を 0 から 2π とする場合は，0 から π までは，$0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{2}$ だから，$\cos^2\frac{\theta}{2}\ge 0$ となり，$2\cos\frac{\theta}{2}$ でよいけれど，π から 2π までは，$\frac{\pi}{2}\le\frac{\theta}{2}\le\pi$ だから，$\cos^2\frac{\theta}{2}\le 0$ なので，$-2\cos\frac{\theta}{2}$ の積分になります．そこに注意すれば，うまく計算できると思います．

問．C^1 級写像の意味を教えてください．

答．**１階微分できて導関数が連続**，どの成分も ($x(u,v)$ も $y(u,v)$ も) そうである，ということです．ヤコビアンを考えると，１階微分が出てきて，それを積分したいので，その１階微分したものの連続性を (理論を展開するために) 仮定したわけです．

問．D が「連結のとき」とは，どんなときですか？

答．D が２つの部分に分かれていない，ということです．

問．教科書の記号の $\subset$ と $\in$ の違いがよくわかりません．

答．$\subset$ は部分集合の記号，$\in$ は要素 (あるいは元，点とも言う) の記号です．たとえば，$(0,1)\subset\mathbf{R}$ であり，$0\in\mathbf{R}$ です．

問．★教科書 p.15 の例 2 で，$\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\log 2$ となるのはなぜですか？

答．$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ で，最後の項の**極限**は，積分で計算できて，$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$ となるわけです．

問．いまはやりの「定説」とは何ですか？

答．うむ．あれは「自説」を無理やり「定説」と言っているだけだと思います．まあ，それはともかく，数学には定説というものはありません．いいですか,「定義」と「定理」があるだけです．

問．テストに出るところをさりがなく教えてくれないでしょうか？

答．ここだけの話ですが，演習で扱った問題の関連問題を主に出題する予定です．でも，同じ問題は出しませんから，本当に理解して解いていないとよい解答が書けないと思います．それ以外の問題も１題ぐらいは出題しますが，それも，講義を良く聴いて準備していれば大丈夫ですよ．