数学Ｄ質問の回答　担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ２ (１９９９年１０月２９日) の分

問． 積分の範囲で，$\int_{-\infty}^{\infty}$ と「∞」が付くとわからなくなります．どのような原理で計算するとよいのですか？

答． 講義で説明したとおり，積分を２つに分け，それぞれを，有界区間上の積分の極限としてとらえます．つまり，$\int_c^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\int_c^t$ などと定義するわけです．これは計算法ではなく，**広義積分のもともとの定義**なのです．この説明は，講義ノートや教科書に詳しく書いてあります．とにかく，**我流で計算すると間違えます**が，理論通りに計算すれば道を踏み外すことはないで，何の心配も要りません．

問． Γ 関数や B 関数は，どういうことを研究する過程で現れたものですか？どのような利用法がありますか？ガンマ関数やベータ関数は，簡単に言うとどんな関数になるのですか？

答． 歴史的な詳細は不明ですが，これらの関数はいろいろな場面で登場します．３角関数や指数関数，対数関数が重要なのと同様に重要な関数です．この講義の範囲内では，n 次元球の体積の計算 (教科書 p. 75) に登場します．それから，大事なことは，そう簡単には言えません．

問． 「特殊関数」という意味がわかりません．

答． 「特殊な関数」ということですが,「初等関数ではないが，特別に重要な関数」という風に理解すると良いと思います．したがって，特殊関数 (ガンマ関数，ベータ関数，ベッセル関数…) は，昔から良く研究されています．

問． ガンマ関数の定義で，p は，初めは定数で，そのあと変数としていますが，どういうことですか？

答． 関数というものは，変数 (引数とも言います) を持ちます．$\Gamma(p)$ が関数である，という場合，何が変数か，ということを明示する必要があり，この場合 p が変数だよ，と言いたかったわけです．変数は，variable の訳ですが，もちろん，p のそれぞれ値 (value) を決めれば，それは定数となり，$\Gamma(p)$ の値が (積分が収束することから) 確定するわけです．その，p のそれぞれの値を動かす (vary) と，関数ができる，それが，ガンマ関数です．

問． $\Gamma(\frac{1}{3})$ や $\Gamma(\frac{3}{5})$ はわかりますか？

答． 具合的数値はわかりません．たとえば，$\sin\frac{1}{3}$ がわからないのと同じことです．講義では，重要なことの，しかもよくわかっている点だけを説明します．でも，実は**世の中わからないことだらけ**です．そこのところを少しづつ，少しづつ，一歩一歩，理性に基づいて理解していく，ということが科学の精神ですね．(**なんでも簡単にわかった気になる不遜さとは対極にある，健全な精神**が科学では大切です．)

問． $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$ となるところがわかりません．

答． 関数等式 $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ を講義で証明しました．この等式は，正の実数 p なら何であっても成り立つ恒等式です．そこで，とくに p として，n をあてはめて，それに引き続き $n-1$ にあてはめて得られる式です．

問． $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \Gamma(n-\frac{1}{2}+1) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(n-\frac{2n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$ の，$\frac{2n-1}{2}$ がどうしてこの値になるかがわかりません．

答． n からいくつ引けば $\frac{1}{2}$ になるかを考えればわかります．

問． $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$ がわかりません．ロピタルの定理をくり返し使うとのことですが，わかりません．

答． $p > 0$ としているので，これは $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形極限なので，ロピタルの定理が使えます．つまり，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)x^p}{e^x}$ ですね．これまた不定形なので，$\lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)x^p}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)px^{p-1}}{e^x}$ ですね．この段階で，$p \leq 1$ なら，不定形ではなく，極限が 0 になります．そうでない場合は，不定形なので，$\lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)px^{p-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)p(p-1)x^{p-2}}{e^x}$ で，$p \leq 2$ なら，やはり極限が 0 であることがわかります．そうでない場合は，またまたまたロピタルの定理を使っていけば，どんな場合でも極限が 0 であることがわかります．

問． $\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は有名な積分とのことですが，どう計算するのですか？

答． 教科書の p.36 に説明があります．ところで，ある有名な人の言葉に，この式が $1+1=2$ と同じようにすぐにわかるのが真の天才である，というようなものがあったと記憶しています．(「天才」の部分が記憶違いのような気もします)．ともかく私 (石川) は，すぐにはわからないのですが，よく考えればわかります．皆さんも，たぶんそうでしょう．それとも，すぐにわかるかな？

問． 教科書で，$p \leq 0$ のとき，$0 < x \leq 1$ の範囲で，$e^{-x}x^{p-1} \geq \frac{1}{ex}$ となり，積分が発散するという箇所がわかりません．

答． $0 < x \leq 1$ の範囲で，$-x \geq -1$ だから，$e^{-x} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$ ですね．それから，$x^{p-1} = x^p x^{-1} \geq 1^p x^{-1} = \frac{1}{x}$ なので，$e^{-x}x^{p-1} \geq \frac{1}{ex}$ がわかります．積分すると，$\int_0^1 \frac{1}{ex}dx$ は ∞ に発散するので，それ以上の関数を積分しても，やはり，∞ に発散します．

問． $\Gamma(p) := \int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ の $:=$ はどういう意味ですか？

答． 右辺で左辺を定義するという意味で使いました．

問． 広義積分で，$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ と，なぜ 1 のところで分けるのですか？

答． 別に 1 でなくても 2 でも 3 でも何でも良いです．

問． ガンマ関数は，ある意味で，階乗の一般化である，というのはどういうことですか？

答． $p = n+1$ (自然数) の場合，$\Gamma(n+1) = n!$ となるという意味です．ただそのことを「階乗の一般化」とカッコ良く表現しただけです．「ある意味で」というのは，他にも一般化の仕方があり得るかもしれないという，ある意味での知的婉曲表現です．

問． $\int_0^1 \log x dx = \int_\infty^0 ue^{-u} du$ は，どういう変形ですか？

答． $u = -\log x$ とおきます．すると，x が 0 から 1 まで動くと，$\log x$ は $-\infty$ から 0 まで動き，u は ∞ から 0 まで動きますね．$x = e^{-u}$ だから，$dx = -e^{-u} du$ となり，$\int_\infty^0 (-u)(-e^{-u}) du$ となって，右辺になります．

問． 関数が「有界」とは，どんな意味ですか？

答． 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で有界であるとは，その範囲のすべての x について $N \leq f(x) \leq M$ が成り立つような，定数 M, N がある，ということです．つまり，その範囲での $f(x)$ の値域が，有界であるということです．

問． $t \to 0+0$ や $t \to 0-0$ の意味をもう一度説明してください．

答． $t \to 0+0$ は t が 0 に正の方向から (数直線上で右から左へ) 近づくという意味で，$t \to 0-0$ は t が 0 に負の方向から (左から右へ) 近づくという意味です．

問． sin や cos を微分積分するときのプラスマイナスを上手に覚える方法はないですか？

答． ベクトル $(\cos t, \sin t)$ を t で微分すると速度ベクトルになり，それは反時計回りに 90 回転したベクトル $(-\sin t, \cos t)$ になる，というのはどうでしょう．また，複素数を使って，$\cos t + i \sin t = e^{it}$ の t 微分 $(\cos t)' + i(\sin t)' = \{e^{it}\}' = ie^{it} = i(\cos t + i \sin t) = i \cos t + i^2 \sin t = -\sin t + i \cos t$ で覚えてはどうかな．

問． $\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1} dy = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ がわかりません．

答． 定積分の場合，積分する変数のとりかたは何でも，積分値は同じになります．つまり，y を一斉に x に置き換えても，同じ積分になります．

問． 0 を積分するとなぜ C となるのですか？

答． 定数は微分すると 0 だからです．ただし，定積分については，0 はいくら積分しても 0 になります．$[C]_a^b = C - C = 0$ ということですね．

問． 講義のヒントに出てきた，$I_n = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ の漸化式の求め方がどうしてもわかりません．

答． m はとりあえず固定しています．$I_1 = \int_0^1 x^{m-1} dx = [\frac{x^m}{m}]_0^1 = \frac{1}{m}$ は良いですね．$n \geq 2$ のとき，部分積分から，$I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^m}{m}\right)' (1-x)^{n-1} dx = [\frac{x^m}{m}(1-x)^{n-1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^m}{m}(n-1)(1-x)^{n-2}(-1) dx = \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{m-1}(x-1)(1-x)^{n-2} dx + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-2} dx$ と変形して，x^{m-1} で統一すると，$I_n = -\frac{n-1}{m} I_n + \frac{n-1}{m} I_{n-1}$ となるので，移項して整理して，$(1 + \frac{n-1}{m}) I_n = \frac{n-1}{m} I_{n-1}$ となり，結局 $I_n = \frac{n-1}{m+n-1} I_{n-1}$ となります．したがって，$I_n = \frac{n-1}{m+n-1} I_{n-1} = \frac{n-1}{m+n-1} \frac{n-2}{m+n-2} I_{n-2} = \cdots = \frac{n-1}{m+n-1} \frac{n-2}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+1} I_1 = \frac{n-1}{m+n-1} \frac{n-2}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+1} \frac{1}{m} = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2) \cdots m} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ となるわけです．

問． ベータ関数やガンマ関数があるなら，アルファ関数はないのですか？

答． ごく単純な質問ですね．そんなものアルファ(あるか)．“べた”な質問で，我慢がならない．(失礼しました．ただのダジャレです．)

問． 今日の講義は，初めから終わりまでさっぱりわかりませんでした．

答． 今日の講義 (ガンマ関数，ベータ関数) は高級な話で，確かにわかりづらかったかなと思います．でも，だいたい誰でもそう感じるので，あまり気にしなくても大丈夫です．ガンマ関数やベータ関数を講義で取り上げるのは，広義積分の応用という意味があることと，これらの関数が，重要な特殊関数であり，皆さんの将来に役に立つと考えるからです．でも，講義内容を全部記憶しなければならないとか，すみからすみまで完璧に理解しなければいけないというわけではありません．まあ，親や親戚に「いま大学でどんなことを勉強しているんだ」と聞かれて，「ガンマ関数を勉強したよ，ガンマ関数はね，積分を使って定義するんだ」と自慢できる (煙にまける) ぐらいのことは記憶に留めておけば楽しいかもしれません．気楽に気長に人生も数学も楽しみましょう．そして，ついでに，「千歳科学技術大に入学して，すばらしい講義が聴けて本当に良かった」と自慢しておいてください．

問． 質問書の質問につける「説明」は何を書けばよいのですか？

答． 仮に皆さんが口頭で，誰かに質問したとき，「え？どういうこと？」と聞き返されたとして，その質問を補足説明する場合のように書いてください．私 (石川) と「会話」しているシチュエーションを想定して，ていねいに書いてくださいね．では今後ともよろしく．