

数学 D 質問の回答 担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 1 (1999年10月8日) の分

問. 積分をするとき, 積分定数を書いていない様ですが, 積分定数は無視できるくらい小さいものなのですか?

答. 積分定数は, 任意の数を取りうる定数なので, 小さいわけではありません. また, 無視できるくらい小さなものだからという理由で書くのを省略することはありません. 単に, いちいち書くと同様になるから省略したまでです. 当然付くべきであるという理解があるので省略できるのです. (でも, この質問のほのぼのとしたユーモアは評価します.)

問. 原始関数とは何ですか? 歴史的背景も教えてください.

答. 「原始」というのは「もともと」という意味です. 元始女性は太陽であった, という言葉があります. 「元始」も同じ意味ですね. 英語では, primitive です. 太古の, とか, 未開な, とか言った意味は, ここではまったくありません. 微分したら与えられた関数になるような, もともの関数, というのが原始関数の定義です. 誰がもともと使い始めた用語かは知りません.

問. $\int \frac{1}{\sin x} dx$ の計算で, なぜ $\tan \frac{x}{2} = t$ と置くのですか?

答. そう置くと計算できるからです. もちろん, 場合によって, 他の方法も可能かもしれませんが, この方法なら, 3角関数の有理式の積分が必ず計算できる, 万能である, というメリットがあります.

問. 3角関数は有理関数ですか?

答. 3角関数は有理関数ではありません. そこで, 上手に置換して, 有理関数の積分に変換したわけです.

問. $\tan \frac{x}{2} = t$ から, なぜ $\frac{x}{2} = \text{Tan}^{-1} t$ となるのですか?

答. それがアークタンジェントの定義だからです.

問. $\tan \frac{x}{2} = t$ と置いたときの $\sin x$ などの式の形は, 図から求められますか?

答. 求められます. $a = \cos x, b = \sin x$ とおくと, 図から, $1 : t = 1 + a : b, a^2 + b^2 = 1$ となりますね. これを解くと, a や b が t の式で書けます.

問. 部分分数分解で, $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ とおくときの, 右辺の分子をこのように置く理由がわかりません.

答. 通分して比較してみるとわかりますが, Bx の項がないと, 2次の項や1次の項を調節して, 恒等式を成立させることができません. 分母が2次の項の分子を, 一般に1次式と置くことで, 部分分数分解が可能となるのです.

問. 部分分数分解で, A, B, C を求める際, $x = 1, 0, -1$ を代入した理由は?

答. 計算が楽であるという理由だけです. ちなみに, 代入ではなく, 展開して項の係数を比較しても A, B, C を求めることができます.

問. 恒等式には \equiv を使うべきで, $=$ を使うのは間違いでは?

答. \equiv を使った方が確かにはっきりしますね. ただし, 文脈で, 恒等式であることがはっきりしている場合は, $=$ を使っても誤解されないと思います.

問. $\int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{Tan}^{-1} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ がわかりません.

答. 教科書 p. 2 の (3) を使っています.

問. $\int a^x dx$ の積分が解けません.

答. 1つの解き方は, $a^x = e^{x \log a}$ だから, $x \log a = t$ とおくと, $\log a dx = dt$ なので, $\int e^t \frac{1}{\log a} dt = \frac{e^t}{\log a} = \frac{a^x}{\log a}$ となります.

問. 定積分のところで, 積分できない関数にはどんな例があるのですか?

答. 良い質問ですね. たとえば, $0 \leq x \leq 1$ について, 関数 $f(x)$ を, x が有理数のとき, $f(x) = 1$ とおき, x が無理数のとき, $f(x) = 0$ とおいて定めると, この関数は, 積分できません. 実際, どう分割したとしても, すべての ξ_i を有理数に選んで近似値 (リーマン和) を作ると, 1 になり, 無理数に選んで近似値を作ると, 0 になります. いくら分割を細分しても, 極限が決まらないので, 積分可能ではないこととなります.

問. $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ について詳しく説明してください.

答. $|f(x)|$ は絶対値がついているから, $f(x)$ 以上であり, また, $-f(x)$ 以上ですね. だから, $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ であり, $\int_a^b \{-f(x)\} dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ ですね.

問. 定積分は, 連続な関数にだけ考えられるのですか?

答. 不連続であるような点が有限箇所なら大丈夫です.

問. 高校のときからリーマン和がよくわかりません. (一般論ではなく) 簡単な例で説明してください.

答. たとえば, $y = x^2$ と, x 軸と, $y = 1$ で挟まれた領域の面積の近似値を求める問題を考えてみましょう. それには, たとえば, 区間 $[0, 1]$ を n 等分 (n はなるべく大きくとる) して, 領域を, n 個の細長い短

冊に分け、その面積の総和を求めれば良いですね。それは、 $\frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right\}$ ですね。これが、講義で、近似値とっていたものの1例です。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ がその極限になります。

問．積分を計算するのに微分や極限の計算が、なぜ出てくるのですか？

答．定積分の定義を見るとわかるように、積分はもともと極限なのです。微分の定義も思い出してください。微分ももともと極限です。微分積分は極限なのだ、ということを常に意識してください。

問． $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ となるのがわかりません。

答． $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ は良いですか？(もし良くなければ、高校時代の数学の教科書を復習してください。あるいは、 $e^{2it} = (e^{it})^2$ とオイラーの公式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ からわかります)。この式に、 $t = \frac{x}{2}$ を代入した式です。

問． $\sinh x$ の意味がわかりません。

答．ハイパボリックサインです。「微分」の p. 22 を見てください。

問． $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$ は、なんとなくわかります。

答．「なんとなく」ではダメです。徹底的に理解してください。

問． $x = x(t)$ の意味がわかりません。

答． x が t の式であるという意味あい使っています。わりとカジュアルな書き方です。

問． ξ (クシー) の意味がわかりません。

答．意味はありません。ただのギリシャ文字です。 a とか b とか x とは ε とかと同じで、ただの文字です。答案では、 ξ は紛らわしいので使わない方が無難かもしれません。

問．基本的な原始関数の公式は全部暗記した方がいいのですか？簡単に覚える方法を教えてください。置換積分で、どうおけばうまく計算できるか、基準やコツはありますか？

答．暗記する必要はまったくありません。暗記ではなく、明記(銘記)してください。つまり何度も何度も使って身につけてください。(これは、たとえば英語を身につける場合も同じですね。)簡単に覚えたことは簡単に忘れます。第一、簡単に覚えても何の役にも立ちません。置換積分に関しては、基準やコツはありません。古人の知恵が少しあるだけです。現在は、その古人の知恵も、すべては身につける必要がありません。優秀な数式ソフトがあって、計算機があつという間に計算してくれます。皆さんが身につけるべきなのは、その計算の背後にある道理(理論)と、計算機に計算させられるだけの最小限の知識と、とんでもない計算結果を計算機が出したときに、何かおかしい、と思えるセンスです。ところで、唐突ですが、なんでも簡単に済まそうという風潮が、東海村の臨界事故を生んだのかもしれない。たしかに、バケツを使うのが手っ取り早い方法だったわけですが、ウランは危険な物質であるという基本的な道理が欠落したために起きた不幸(人災)とも言えます。皆さんは大丈夫だと思いますが、基本をないがしろにしてはいけない、という教訓ですね。

問．かなり難しくなってきたので、復習をしっかりとしなければならぬと実感しました。

答．難しいと思えるということは、手ごたえがあるということなので、良いことです。

問．質問書が成績に加味されるのはなぜですか？理解しているなら、それにこしたことはないのに、質問しないと成績に加味されないということに絶対的の矛盾が存在しています。

答．疑問のないところに発見もない、進歩もない、なにもない、と言えます。本当に理解していたら、おのずから、その先の疑問が浮かぶはずですよ。(もし疑問が浮かばなかったら、それこそ問題です。)その疑問を率直に、よく考えて文章にしたためてくれれば、それで良いのです。実は、質問が書けるか、そして自分の質問を説明できるかどうかで、皆さんの理解の度合いがわかるのです。それが、質問書を成績に加味している理由です。なにも矛盾はありません。ところで、現代の社会が求めているのは、知識があつて、答えのある問題を器用に解いて、マニュアル通りに物事を処理できる、そういう人材ではありません。変化の激しい国際的競争の時代では、たとえ知識は少なくとも、答えのない問題にも立ち向かう勇気があつて、マニュアルのない状況でも自分を見失わない、柔軟な頭と、広い視野を持った(そして性格が素直な)人物を必要としています。そういう人が増えてくれないと、日本は国際競争に敗北し、没落するかもしれません。実は、日本にすでにその兆候があるのでは、と少し危惧しています。というより、皆さんは、日本だけのためではなく、人類のために必要な人材ですよ。成績がどうのというより、どんどん疑問をぶつけて良く考え、好奇心あふれる人間に成長してくれることを期待しています。

問．質問書を書くルールを明確にしてください。質問書の書き方を教えてください。

答．数学Dの講義内容に関する質問を書いてください。質問はなるべく簡潔に、そして、質問には必ず補足説明をつけてください。補足説明はなるべく詳しく、長い文章で書いてください。その日の講義でも、復習してわいた質問でも、予習して思いついた質問でも、少しでも講義内容と関係することなら、何でも良いです。質問になっていないものは評価しません。良い質問はポイントが高くなります。同じ文章が複数あつたらそれらはすべて0点とします。自分の言葉で書いてください。

回答者から一言。全員の質問には答えられませんでした。答が見つからないときは、直接質問してくださいね。また今回は、とくに良い質問にマークを付けてみました。が金賞で、が銀賞です。(賞金・賞状などはありませんが。)参考にしてください。では、今後ともよろしく。