数学 A 質問の回答　担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 3 (１９９９年6月１８日) の分

問． テーラーの定理は抽象的でよく分かりません．もっと具体的な説明をお願いします．

答． 抽象的だからこそ，一旦わかれば強い味方になります．テイラーの定理を，$f(x) = \sin x, a = 0, n = 3$ の場合にあてはめてみると，$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$ となりますね．ここで，c は 0 と x の間にある，ある数で，適切にとると上の等式が成立する，というのがテーラーの定理の意味あいです．この際，c の数値を特定する必要はまったく必要ありません．特定しなくても良い，というところが "ミソ"です．さて，いまの場合，$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$ ですね．(ここがわからない人は，p.29 を見てください．) したがって，$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(c) = -\cos c$ なので，等式 $\sin x = x - \frac{\cos c}{6}x^3$ を得るわけです．ですから，$y = \sin x$ を３次式で精密に近似しようとすると，$\cos c \to 1, (x \to 0)$ に注目すれば，当然，$y = x - \frac{x^3}{6}$ を選ぶのが適切であることがわかります．微分を知らなければ，こんなことは到底思いつかないと思います．微分を知ればこそ可能な発想と思います．このように，**関数の性質を，微分を使って精密に解析する**もっとも強力な手段の１つが**テーラー展開**なのです．

問． テーラーの定理で，誤差の項がなぜ必要なのですか？誤差だから無視できると思うのですが．

答． 誤差の項をつけないと，正しくない式になってしまいます．どの程度の誤差が無視できるかは，扱う問題によって微妙に違います．誤差を無視するのは，必要なときに，はじめて無視すれば良いのであって，はじめから，やみくもに無視していたら，どれが正確な式で，それが近似式なのかわからなくなってしまって，すっかり "わや"になります．(関西弁で，収拾がつかない，というぐらいの意味でしょうか．)

問． 無限級数展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ で，$n = 0$ から $n = \infty$ を代入すると，うまくいきません．

答． $n = \infty$ は代入しません．$n = 0, 1, 2, \ldots,$ と代入して永遠に足し続けるという意味です．(実際に足し続ける必要はなく，その操作を想像するだけです．) $\sum_{n=0}^{\infty}$ は，$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}$ の意味です．

問． 誤差 $o(x^n)$ が出てこない関数はないですか？

答． あります．$f(x)$ が n 次多項式 (別名，n 次整式) の場合は誤差はありません．でも，そのような特別で奇麗な場合に限ります．つまり，テーラーの定理は，一般の (十分な回数微分できるような) 関数を，(与えられた点の近傍において) 多項式で近似できる，という結果なのです．

問． コーシーの平均値の定理と，ロピタルの定理の関係がわかりません．

答． コーシーの平均値の定理を使って，ロピタルの定理を証明しました．

問． 不定型極限のところのロピタルの定理で，分子，分母をそれぞれ微分して，不定型であれば，繰り返し使うとのことですが，無限に不定型ということはあるのでしょうか？

答． 良い質問ですね．あります．でもそれは非常に特殊な場合であり，めったに起きない現象なので，気にしなくても大丈夫です．

問． ロピタルの定理の証明で，$\lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ から，$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ への移行過程がよくわかりません．

答． よい質問ですね．質問を見ると，よく勉強しているかどうかわかりますね．ロピタルの定理では，$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，という大前提があります．極限が存在するということは，a に近づく近づき方にはよらず定まるということですね．ですから，a と x の間にある，ということだけしかわからない c であるけれども，ともかく，x が a に近づくとき，c も a に近づくはずだから，定まっているところの極限値 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に近づくはずである，という (比較的高級な) 論法です．

問． ロピタルの定理は，あまり多用するものではない，と昔教わったのですが，そうなのですか？

答． そうですね，乱用はいけません．不定型の極限でない場合は，当然，使用してはいけません．でも，不定型の極限なのだ，という点を押さえていれば多用できます．

問． $\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\frac{1}{x}}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ 型とのことですが，$\lim_{x\to 0} \log|x|$ や $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ は ∞ なのですか？

答． 良く気がつきましたね．$\lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty$ であり，$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ は片側極限が $\pm\infty$ となりますね．ですから，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，というより，$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 型というべきでしたね．

問． 関数の極値のところで，$f(x) = f(a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ とありますが，c はどう扱えばよいのでしょうか？

答． 扱う必要はありません．ともかく，a と x の間のどこかにあるんだね，ということだけ意識して，横目でにらんでおけば十分です．

問． 極値のところで，$f''(a) = 0$ のときは，$f'''(a)$ で調べる，$f'''(a) = 0$ のときは $f^{(4)}(a)$ で調べる，とのことですが，何を，どうやって調べるのですか？

答． $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるかどうか，ということを，テーラーの定理を応用して調べます．必要条件 $f'(a)=0$ を満たしていて，さらに，$f''(a)=0$ でもある場合は，テーラーの定理で，$n=3$ の場合を適用すると，$f(x)=f(a)+\dfrac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$ となるような数 c (ただし，a と x の間にある) の存在がわかります．c がどこにとれるか，ということは関数 $f(x)$ に依存しているので，特定はできないけれど，とにかく存在は言えるわけです．ですから，もし $f'''(a)\neq 0$ ならば，x が a のごくごく近くにある限り，$f'''(c)$ はずっと正か，ずっと負かのいずれかであり，一方 $(x-a)^3$ は，$x=a$ の前後で符号が変わるので，結局，$x=f(x)$ は $x=a$ では**絶対に極値を取りえない**ということがわかります．同様の考察を，$f'''(a)=0$ の場合に実行してみてください．

問． なぜ，$f(x)>f(a)$ ということから，極小ということになるのかが，わかりません．

答． ここで，$x\neq a$ は a にごく近いすべての x です．そのような x に対し，$f(x)>f(a)$ となるということが，$f(x)$ が $x=a$ で**極小である**という意味です．

問． $f^{(n)}$ が $x=0$ で連続であれば，$f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)\to 0(x\to 0)$ がどうして成り立つか，教えてください．

答． いまの場合，$0<\theta<1$ です．したがって，θx は 0 と x に挟まれている数です．したがって，x が 0 に近づくとき，θx も 0 に近づきます．ですから，そのとき，$f^{(n)}(\theta x)\to f^{(n)}(0)$ となります．

問． 教科書 p.38 の 問 6 (3), (4) は数学的帰納法で証明できますか？

答． できます．まず，$n=1$ のとき成立するのは，すでに計算して，結果を推測しているので明らかかと思います．次に n の場合，成り立つと仮定するわけですね．たとえば，(3) だったら，$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{(2n-3)!!}{2^n}(x+a)^{-\frac{2n-1}{2}}$ が成り立つと仮定するわけですね．そして，$f^{(n)}(x)$ をもう１度微分すれば，$f^{(n+1)}(x)$ となるから，$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\dfrac{(2n-3)!!}{2^n}(-\dfrac{2n-1}{2})(x+a)^{-\frac{2n-1}{2}-1}=(-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}(x+a)^{-\frac{2(n+1)-1}{2}}$ となりますね．つまり，n の場合成立すると仮定すると，$n+1$ の場合も成立するので，したがって，数学的帰納法によって，すべての自然数 n について成り立つ式なのだ，ということが証明されるわけです．

問． ライプニッツの公式で，$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ の意味がわかりません．!! がわかりません．なぜ，$0!=1$, $0!!=(-1)!!=1$ なのですか？なぜ，$x^0=1$ なのですか？

答． 教科書 p. 3 と p.4 を見てください．$0!=1$, $0!!=(-1)!!=1$, $x^0=1$ などはそう定めると，たいそう都合がよいので，そのように約束するということです．

問． 教科書で，1^∞ や ∞^0 は不定型，とありますが，ともに１ではないのですか？

答． ∞ というのは通常の数ではないので，通常の計算規則をそのまま適用しようとするのは危険です．1^∞ は，１に近づく関数の，∞ に発散する関数乗，の極限値という意味です．たとえば，$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はその典型的な例です．**取扱い注意**ということです．∞^0 も，∞ に発散する関数の，0 に近づく関数乗ということなので，やはり取扱い注意です．

問． $\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ がわかりません．

答． 部分分数展開です．$\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{b}{x}$ とおいて，定数 a,b を求めるとよいかもしれません．

問． 記号 $\equiv$ はどういう意味ですか？

答． $f\equiv 0$ は f が恒等的に 0 に等しいという意味です．$f(x)=0$ と書くこともありますが，強調したいとき，$\equiv$ をよく使います．

問．「挙動」の意味がわかりません.「狭義」ってどういう意味ですか？「漸近展開」の名前の由来はなんですか？

答．「ふるまい」です．国語辞典を引いてください．たとえば，あの男は挙動不審なので職務質問した，などと使います．狭義は「せまい意味」という意味です．漸近とは,「だんだん近づく」ということです．(あれ，国語の時間のようですね．)

問．「近似」というのだから，全体にひろまっているものを，ある１点に近づけるということではないですか？

答． これは,「量子力学の古典近似」ということからの連想でしょうか．でも，ここでは，そういう意味あいはありません．たとえば，円周率 π の近似値は，3.14159 である，という意味で使う近似です．

問． ほとんどの説明を理解したので，疑問はありません．

答． 喜ばしいかぎりですが，この質問書は評価の対象になっていることを忘れないでください．つまり，がんばって質問しないと，点数になりません．こちらも本当にわかってくれているかどうか，わかりません．わかったら，その先を少し考えて，質問してください．ともかく，質問を書かなかった分，試験で奮起しなければなりませんよ．質問を書いた人も，油断することなく試験の準備をしてください．では，皆さんがんばってね．