数学A質問の回答　担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (１９９９年5月２１日) の分

問． $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ での接線の方程式が $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ となるのはなぜですか？

答． 微分係数の定義に登場する $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，グラフ上の２点 $(a, f(a)), (a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾きです．そして，h をどんどん 0 に近づけていくと，その直線は，点 $(a, f(a))$ での接線に近づいていきますね．したがって，その傾きは $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ となります．また，接線が $(a, f(a))$ を通ることを考慮すると，方程式は，$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ となります．

問． 逆３角関数をもとめるとき，なぜ単調な部分に限定しなければならないのですか？$y = \sin x$ の逆関数を考えるとき，$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ としましたが，たとえば，$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ではだめなのですか？

答． よい質問ですね．単調な部分に限定しないと，１つの値 y に対して，$y = \sin x$ となるような x が複数あって，１通りに決まらないという不都合が生じます．そのために，x の範囲をあらかじめ限定したわけです．その際，x の範囲のとり方は，確かにいろいろありますが，伝統的に，$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ にとります．これを主値とよぶこともあります．

問． なぜ Sin^{-1} と書いて，$\sin^{-1}$ と書かないのですか？

答． そう書いても間違いではないですが，主値を選んでいるよ，という目印に，頭文字を大文字に書いています．Cos^{-1} や Tan^{-1} も同じ使い方です．

問． $\mathrm{Sin}^{-1} y$ は sin をとると y になる数とのことですが，どういう意味ですか？

答． $\sin(\mathrm{Sin}^{-1} y) = y$ ということです．

問． $\mathrm{Sin}^{-1} y$ を考えるとき，$-1 \le y \le 1$ とする理由がわかりません．

答． y は sin の取り得る範囲しか動けないから，$-1 \le y \le 1$ となります．

問． 逆３角関数はどういう場面で利用されるのですか？

答． いろいろな場面で利用されますが，とくに，後でやる不定積分の計算で必要になります．そのために，逆３角関数の微分を知る必要があります．

問． $y = \sin x$ と $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ は何に対して対称ですか？

答． グラフのことですね．直線 $y = x$ に関して対称になります．

問． $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{\mathrm{Cos}^{-1} x}$ としてよいですか？

答． よくないです．

問． $t = e^x - 1$ とおくと，$x \to 0$ のとき，$t \to 0$ となることがわかりません．

答． $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0}(e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ です．

問． なぜ，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ となるのですか？

答． $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ はよいですね．いま，$t = \frac{1}{x}$ とおくと，$t \to 0+0$ (正の方向から 0 に近づく) のとき，$x = \frac{1}{t} \to +\infty$ であり，$t \to 0-0$ (負の方向から 0 に近づく) のとき，$x = \frac{1}{t} \to -\infty$ であり，両方の片側極限が e になるので，極限が e になります．

問． なぜ $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1$ となるのですか？

答． $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ であり，$y = \log x$ は $x = e$ のところで ($x > 1$ の範囲ならどこでも) 連続なので，$\lim_{t\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log e = 1$ になります．その逆数の極限も 1 ですね．

問． どうしてグラフがとがっているところでは微分不可能なのですか？

答． "とがっている" というのは日常語であり，数学的に厳密に規定された言葉ではないので，誤解をまねきやすいのですが，左から近づいたときの接線の傾き (の極限) と，右から近づいたときの接線の傾き (の極限) が違ってしまうということですね．これは微分係数の定義のところで，極限が存在しないことを意味します．(片側極限はあったとしてもそれらが一致しない．) つまり，微分係数が存在しない，したがって微分できないということになります．このとき，接線も当然定まりません．

問． 板書で，$\dfrac{\cos(a+h) - \cos h}{h}$ と書いてありましたが，ひょっとすると，$\dfrac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ の書きまちがいではないですか？

答． その通りです．

問． $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ がわかりません．

答． いろいろ説明のしかたがあります．$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0\cos x + 1\sin x = \sin x$ です．また，コサインのグラフを $\frac{\pi}{2}$ だけ右に平行移動するとサインのグラフになることから，$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ とも説明できます．

問． ３角関数のいろいろな公式は覚える必要がありますか？

答． 覚えられるなら覚えても良いです．(とくに基本的な加法公式ぐらいは．) でも無理して覚える必要はありません．テストで必要なときは，なるべく問題文やヒントの中に明示するようにします．将来，皆さんがそのような公式を必要とするときは，文献を調べれば事足ります．それより原理原則を理解することが第一で，たとえば微分という考え方を身に付けておけば，こういう問題は，ああそうだ，微分を使えば，こう書けるはずだから，これは，あの理論を使えば解けるんだ，というふうに，ひらめきが生まれ，調べる手段が見つかるわけです．

問． $\frac{0}{0}$ 型極限とはどういう意味ですか？

答． 極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を考える際，$\lim_{x\to a}f(x)=0$ であり，$\lim_{x\to a}g(x)=0$ となる場合のことを指しています．この場合は，形式的に考えると極限が不定となってしまうのですが，式変形などを行って深く解析すると極限値が定まっていることがわかる場合もあるわけです．たとえば $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ など．

問． $h\to 0$ のとき $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$ となることがわかりません．

答． $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となることはよいですね．ここで，記号 x は何にとりかえてもよいので，とくに，$x=\dfrac{h}{2}$ とおけば，$h\to 0$ のとき，$x\to 0$ となって，$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となります．

問． $o(g(x))$ (オミクロン) という記号の意味がわかりません．$\cos x-1=o(x)$ を示すのに，$\dfrac{\cos x-1}{x}$ の極限を考える理由がわかりません．

答． x が 0 に近づくとき，x と x^2 はどちらが，よりスピーディーに 0 に近づくでしょうか？x が小さくなると，x^2 はもっと小さくなるので，x^2 の方がより速く 0 に近づきます．これは，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$ ということからわかります．同じように考えて，$g(x)$ でわったものの極限が 0 になるような式を，区別なく記号として $o(g(x))$ と表すのが，ならわしです．ですから，$x^2=o(x)$ と書いてよいわけです．おおざっぱんな記号なので，$x^3=o(x)$ も正しい表し方ということになります．

問． $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$ の極限がないと教科書の解答にありますが，どうしてですか？

答． これは，$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ が存在しないのと同じ理由です．x が正の方向から 0 に近づくとき，$+\infty$ になり，x が負の方向から 0 に近づくとき，$-\infty$ になり，$+\infty$ や $-\infty$ とも定まりません．

問． $\lim_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}$ の $0-0$ の意味がわかりません．

答． x を負の方向から 0 に近づける，という意味です．

問． 練習問題 1.3 の 4.(2) の解答で，$2-\dfrac{1}{n}<2$ から，なぜ収束になるのかわかりません．

答． 肝心なのは，数列が有界であり，かつ，単調であるということを確かめることです．すると，定理 1.3 によって収束すると結論づけられます．この場合，$0\le a_n<2$ ということから有界であることがわかり，単調増加なこともすぐにわかるということです．

問． 巾とはなんですか？

答． 冪 (べき) の略字です．x^n のように，x を何乗かしたような式を，x の "べき" と言います．

問． ガウス記号がわかりません．

答． ガウス記号 $[x]$ は x を越えない最大の整数を意味します．たとえば，$[1.1]=1,[\frac{5}{2}]=2,[e]=2,[0]=0,[-2.3]=-3$ です．

問． 有界と非有界の意味がまだわかりません．

答． 数列 $\{n\}$ は有界ではないです．一方，$(-1)^n$ は有界です．このことから推測してください．

問． 教科書 p.6 の例 2 の，$0\le r<1,|a_{n+1}|\le r|a_n|$ ということから，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ということが導かれるところだけがわかりません．

答． 私 (石川) には現在，貯金が 10 億円あります．(うそです．) でも，悲しいことに毎月，目減りしてしまい，次の月には，前月の $\dfrac{99}{100}$ 倍になってしまいます．将来，私 (石川) の貯金はどうなるでしょう．恐ろしいことにほとんど 0 円になってしまうんです．(0 円にはなりません．あくまで極限が 0 です．ですから，私 (石川) が生きている間ぐらいじゃ関係ないから，リッチな生活ができます．) でも，私 (石川) には借金も 10 億円あります．(これもうそです．) でも，千歳科学技術大学でまじめに教えているおかげで，毎月返済できて，次の月には，前月の $\dfrac{99}{100}$ 倍に残金を減らすことができます．将来，借金はほとんど 0 円になるはずなんですが... えっ？10 億円の貯金で，借金を返せばいいんでない？そだね．

問． $(2n)!=2n\cdot 2(n-1)\cdots 2$ はおかしいですか？

答． たとえば $n=2$ の場合，$(2n)!=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ であって，$4!=4\cdot 2$ ではないです．$(2n)!=2n\cdot(2n-1)\cdots 2\cdot 1$ が正しいのです．

問． 試験の準備はどうしたらよいですか？推薦する微分の教科書を教えてください．

答． 教科書をよく読んで，教科書の問，問題を丹念に解いていけば大丈夫です．他の参考書を読む必要はありません．