

数学 A 質問の回答 担当教員 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 1 (1999年4月30日) の分

問. $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ の極限を調べるのに, n を 2 進法で表した “けた数” になぜ注目するのですか? とても自分では思いつきません.

答. 数学は永い歴史をもち, 様々な英才たちが努力を重ねて築きあげてきた, いわば知的殿堂です. こう言うのはなんですが, そうやすやすとわからなくて当然です. すぐにわかったら天才ですよ. それに, もし講義を聞いてすぐわかるような事だったら, それは簡単なことだから, 大学で講義する意味がないですね. 難しくて当然なんです. 数学は, 講義の前に教科書をながめて 10%, 講義をきいて 30%, 演習で問題を解いて 60%, 少し忘れて 55%, 次の講義を聞いて 73%, ひらめいて 90%, 勘違いで 75%, 友達と話して 80% という具合にすこしずつ理解していくものなんです. 語学の勉強と一緒にですね. 数学や語学は若いときでないと身につかないと言われます. その理由の 1 つは, 若いときは, 「わからない」という状態に耐えられる気力, 体力が十分あるということだと思います. 私 (石川) のように年をとるとダメですね. (老人力はついてきますが.) そういう意味で, 君たちの若さに期待しています. もちろん, こちらも工夫して, わかりやすく講義して, 皆さんの理解度をアップするよう努めますが, まあ, お互い気長にやりましょう. さて, 質問についてですが, これは自分ですぐに思いつかなくても気にしないでください. 昔の偉い人が, 苦労して編み出したことには, 素直にしたがってみるのも良いと思います. とにかく, ここでは, s_n という数列が無限大 (∞) に発散することを, 何とかして示したいわけです. どんな間接的な方法でもよいわけです. たとえば, ∞ に発散するのがよくわかる別の数列 t_n で, $t_n \leq s_n$ となるものを強引にでも見つけてくれば, t_n が ∞ に発散するから, s_n も ∞ に発散することになって, みんな納得するわけです. では, その補助的な数列をどうやって見つけるか. まず, 分母を大きく取り替えると, そのほうが小さくなりますね. それから, s_n に登場するのはみんな正の数だから, その 1 部分を取り出せば, そのほうが小さくなりますね. そこで, 足したときに計算しやすくなるように, 分母を 2 の “べき” にそろえてみます. つまり, 3 を 4 に替え, 4 は 4 のままにし, 5 は $8 = 2^3$ に 6 も 8 に 7 も 8 に替え, 8 は 8 のままで, 9 は $16 = 2^4$ に, という具合に替えていくわけです. それから, n のところまで加えずに, その手前で最後に出でくるような 2 のべきのところ (それを 2^m と書いています) までの部分だけを加えます. そうやって補助的な数列 t_n を考えるのです. 10 進法では 10 のべき ($10, 100 = 10^2, 1000 = 10^3, \dots$) をもとに考えるわけですが, 2 進法では 2 のべきを基準に考えます. 2 進法では, 2 は 10 と表され, $4 = 2^2$ は 100 と表され, 2^m のけた数は $m+1$ となります. ここでは 2 進法で考えると後の計算が楽になるので採用したのです. それが教科書 p.10 の例 6 の不等式の部分の舞台裏です.

問. 2 項展開がわかりません.

答. 教科書の p.3 をよく読んでください. ${}_nC_k$ は階乗を使って, $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ で表されます. $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$ で, $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\dots 2 \cdot 1$ であるので, 約分できます.

問. $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$ の最初の 1 がなぜ出てくるのかわかりません.

答. 最初の項は ${}_nC_0 1^n (\frac{1}{n})^0$ ですが, ${}_nC_0 = \frac{n!}{n!0!}$ であり, $0! = 1$ (p.3 を参照) なので, ${}_nC_0 = 1$ であり, 他もすべて 1 なので, 結局最初の項は 1 になります.

問. Σ の計算がわかりません.

答. $\sum_{k=0}^n$ はそれにつづく式の k のところに, $k=0, k=1, k=2, \dots$ と次々に代入して行って, それをすべて加えるという意味の記号で, 非常に便利なので, 使いこなせるようにしましょう.

問. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ が収束することの証明の部分がわかりません.

答. 多くあった質問に答えると, $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$ の部分は 2 項展開をあてはめただけです. そこで, $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$ の部分を

$$\frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})$$

と変形しています. 確かに簡単な変形ではないですが, 今年 1 年数学をよく勉強して, 上手な計算だなあと余裕をもって納得できるぐらいの実力を身につけるようがんばってください.

問. ネピアの数 (自然対数の底) $e = 2.718\dots$ というのは覚える必要がありますか?

答. 覚える必要はありませんが, 2 と 3 の間にあるぐらいは知っておいた方がよいかもしれません. 大事なのは, e の定義のほうで, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ ということです.

問. 教科書の定理 1.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ の説明がわかりませんでした.

答．詳しい厳密な証明については，教科書 p.26 を読んでください．講義ではおおざっぱな説明をしました．補足説明しましょう．まず，十分大きな n について，つまり，ある番号 n_0 があって， n_0 以上の n について， $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ は α にほぼ等しくなりますね．つまり， a_{n+1} はおおよそ αa_n に等しいですね． a_n はおおよそ αa_{n-1} に等しいですね．それは，おおよそ $\alpha^2 a_{n-2}$ に等しいですね．ということを繰り返すと $\alpha^{n-n_0} a_{n_0}$ となって，いま， $c = \alpha^{-n_0} a_{n_0}$ とおけば，これは n によらない定数で， a_n は $\alpha^n c$ におおよそ等しくなりますね．でも，かえって誤解される表現だったと反省しています．

問．数列が有界ということはどういうことですか？

答．ある有限区間に含まれることです．

問．有界とは，ある M があって， $-M \leq a_n \leq M$ となるとのことですが，たとえば， $-2 \leq a_n \leq 5$ だと有界ではないのですか？

答．その場合， $-5 \leq a_n \leq 5$ でもあるから有界です．

問． x^n が収束するのが $-1 < x < 1$ の場合なのはなぜですか？

答．教科書 p.6 の例 1 で r のところを x で置き換えればよいかと思います．

問． $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ は覚えるのですか，定理ですか？

答．定理です． $-1 < x < 1$ の範囲でなりたちます．でも，ただ覚えても意味はありません．教科書 p.10 の例 5 をよく読んで，感動してください．

問．教科書 p.6 例 2 の説明で，なぜ $r = \frac{1+\beta}{2}$ ととったのかわかりません．

答．わかりやすくするためにこのようにとりました．実は， r は β と 1 のあいだの数ならなんでもよいです．

問．板書で， $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ と書いていますが， $\lim_{n \rightarrow \infty}$ はつけなくてよいのですか？

答．第 1 回の講義で説明したように， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ということをも， $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ とも表すと言いました．ここでは，後者の表現をつかったわけですが，その場合， $=$ ではなく， \rightarrow を使っていることに注意してください．どちらも正しいのです．

問．文字アレルギーはどうすればよいですか？

答．この回答をよく読んで慣れてください．

問．数学の予習，復習はどうやったらよいですか？

答．予習は，教科書を，わからなくてもよいから通読してください．問題も選んで解いてみてください．すると，なにが知りたいかわかってくると思います．復習は，やはり問題を解いてみて，必要に応じて教科書を見直すとよいかと思います．すると，だんだんますます数学が得意になってきます．

問．演習のレポートは内容で評価が変わるのですか？

答．変わります．質問書についてもそうです．

要望．質問はその場でさせてほしいです．

答．もちろんその場で質問してかまいません．ただ，通常，心理的制約やはずかしさから，皆さんが質問しづらいということがあり，また，質問と補足説明を文章で書いてもらうことで，皆さんの問題意識がより鮮明になり理解力が増す，ということもあって，質問書という形を採用し，成績評価に加味しているわけです．どうかご理解ください．

回答者からの激励と注意．貴重な質問ありがとうございます．また，多くの要望，感想も寄せられました．参考にさせていただきます．皆さんの質問は，講義をするうえで非常に参考になります．皆さんがどういうことに疑問を持っているか，何を知りたいかは，講義をしている側には，なかなかわからないのです．新鮮な質問，私(石川)をうならせるような質問，おおいに期待しています．ただし，質問書を書く場合，講義内容に関する質問と，その質問に関する補足説明を，はっきり分離して書いてください．補足説明なるべく詳しく書いてください．講義の最後に 10 分程，質問書を書く時間を設けます．そのときは，友達と相談して書いてもよいですが，かならず最終的には自分の言葉で表現してください．類似した質問，説明の質問書が複数あったら，それは 0 点とします．要望，感想もありがたいですが，それらは評価の対象には残念ながらなりませんので悪しからず．