微分積分学１ (１年４０組) 質問に対する回答

No. 5 (２００４年6月２１日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項です．**テストは７月２６日 (月) の講義時間帯に行う予定です．詳細については，お知らせ・掲示済みです．試験情報のプリントをまだ受け取っていない人は受け取ってください**.
今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，いままでの回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に載せてあります．参考にしてください．

問．偏微分の詳細について教えてください．// z_x や z_y はそれぞれ何を表しているのですか？

答．こんにちは．さて回答ですが，２変数関数 $z = f(x, y)$ について，z_x **は** x **に関しての微視的は変化，**z_y **は** y **に関しての微視的は変化を表す量です**．たとえば，$z_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ です．これは，y を $y = b$ と停めて１変数関数 $f(x, b)$ について微分係数を求めていることになります．つまり，講義で説明したように,「x について偏微分するのは，y を定数とみて x で微分すること」です．同様に「y について偏微分するのは，x を定数とみて y で微分すること」です．偏微分は「偏った微分」です．したがって，計算のやり方は１変数の場合と同じです．ただし，導関数は z_x, z_y の２種類が出てきます．

問．合成関数の偏微分がよくわかりません．１変数のときに分数のように扱えたのはたまたまですか？// 連鎖律について，$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ となっていましたが，微分の場合でも約分みたいなことができるので，$\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{\partial z}{\partial u}$ になってしまうのではないですか？

答．たまたまです．１変数の微分でも，偏微分でも，$\frac{\partial z}{\partial x}$ は分数のように見えますが，分数ではないので，分数のように扱ってはいけません．(どうして分数として扱うと変なことになるかというと，極限値を取る前の段階で「x が Δx だけ変化したときの z の変化量 Δz」と「y が Δy だけ変化したときの z の変化量 Δz」は異なるからです．)

問．合成関数の微分公式 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ の証明がわかりません.

答．わからなくても，気にしないでください．偏微分の定義と，(講義では紹介しなかった) 全微分可能性の定義にしたがって淡々と進めている証明です．φ, ψ が微分可能だから連続であるということを使っています．

問．$z = f(x, y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ という条件だけから z_x, z_y を求めることは不可能なのですか？

答．可能です．$z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta, z_\theta = z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta)$ という式を連立１次方程式とみれば簡単に求められますね．(講義では，求める必要がなかったから求めなかっただけです).

問．接平面の方程式 $z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ という公式や，**連鎖律** $z_u = z_x x_u + z_y y_u, z_v = z_x x_v + z_y y_v$ といった公式は，いわゆる「基本的で簡単な公式」に入るのですか？

答．はい.

問．全微分と偏微分は何がちがうのですか？

答．偏微分は f_x と f_y のそれぞれを指しますが，全微分は，それらを両方まとめて考えたものを指します.
全微分は $df = f_x dx + f_y dy$ と表すことがあります.

問．連鎖律について，合成関数が３つ以上でも成り立ちますか？// 連鎖律は変数の数が増えても使えるのですか？例えば，K を x, y, z の関数として $K = f(x, y, z), x = \alpha(s, t, u), y = \beta(s, t, u), z = \gamma(s, t, u)$ のとき，$K_s = K_x x_s + K_y y_s + K_z z_s, K_t = K_x x_t + K_y y_t + K_z z_t, K_u = K_x x_u + K_y y_u + K_z z_u$ は成り立ちますか？また，もし成り立つならば，変数の数が４つ，５つと増えても同様に成り立ちますか？

答．成り立ちます．変数が増えても同様に成り立ちます.

問．極座標は２変数の時しか表されないのでしょうか？３変数の極座標はあるのでしょうか？

答．あります．教科書 p.120 を参照してください.

問．偏微分の２回微分は何を意味しますか？変曲点ならぬ “変曲線”がわかったりするのでしょうか？

答．なるほど．２階微分は，本質的に $f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy}$ の３つありますが，これらを合わせて使うと，**極値問題が解けます**．さらに，曲面の凹凸もわかります．質問にある “変曲線”は，曲面の凹凸の変化する線という意味だと思いますが，これは専門用語で “**放物曲線**” と呼ばれます．(放物線とは違います)．それも２階微分で求められます．(１年生の講義では，極値問題に応用することだけを取り上げます).

問．漸近展開で出てくる $o(x^n)$ とは何ですか？// o (**ランダウの記号**) の意味がよくわかりません．教科書の「$x \to 0$ のとき $o(x^2) = o(x)$ だが $o(x) = o(x^2)$ ではない」というのはなぜですか？

答．あくまで**関数の状態を表わす形容詞**であると考えてください．$o(x)$ が具体的なもの表わすとは考えないでください．$o(x^n)$ は，あくまで,「それを x^n で割ってから，$x \to 0$ と極限をとると 0 になるぐらい，x^n より

も非常に小さい」という形容詞です．したがって，教科書の文章は,「x が (1 に比べて) 非常に小さいとき，x^2 よりも非常に小さい関数は，x よりも非常に小さい．しかし，x よりも非常に小さい関数が，x^2 より非常に小さいとは限らない」という具合に読めばわかります．

問． 3変数の関数 $f(x, y, z)$ を偏微分すると何を表すのですか？// ２変数までなら計算はもちろんできるし，接平面という考え方もフィーリングでわかるのですが，３変数になると，計算はできると思うけれど，x, y, z の他に w 軸というのも表現できないし，全微分したものが，一体何を表すのかわかりません．僕たちの住む宇宙には，6 だか 7 次元くらいまでしか存在し得ないとかそのような話を聞いたことがあるのですが，それとも関係あるのでしょうか？// １変数関数のグラフは平面に，２変数関数のグラフは立体的に書きおこすことができますが，それより文字数が増えたらグラフを書けますか？また１変数関数のグラフは２次元，２変数関数のグラフは３次元という言葉と対応しているように感じましたが，では４次元とはいかなる空間 (?) なのでしょうか？それがわかれば４次元ポケットの容量を説明できますか？// ４次元以上と考えられるようなことは，何らかの技術に応用されているのですか？それとも机上の空論なのでしょうか？

答． w 軸も表現できます．よく考えてみると，もともと，図というものは２次元的なものですね．われわれは，その２次元の図で３次元を想像しているだけです．同じように**想像力を駆使すれば，何でも表現可能であり理解可能**です．(人間が３次元を容易に認識できるのは，ライオンなどの敵が襲ってくるときに遠近感を感じることが生存に深く関わることから，進化の過程で獲得された能力なのかもしれません)．ともかく，仮に簡単に想像できなくても，**高次元の場合でも同様に議論できる手段を持っているということが数学の強み**です．ところで，この**世の中は何次元かというと，実は無限次元**です．身の回りのことだけ考えても，次元の違うことはいくらでもあります．簡単な話，皆さんの身長，体重，座高，足のサイズ，声の周波数，で５次元がもう必要になりますね．われわれは，必要に応じて，無限次元からいくつかの次元を取り出して注目して，その時々を懸命に生きていく，ということです．４次元を扱うのも日常茶飯事です．(右手で箸を持ち，左手で茶わんを支え，お茶漬けをさらさらかき込むのは，何次元も必要な行動なので，ロボットにはなかなかできない芸当なのです)．したがって，４次元が神秘的に感じられるのは，SF の中だけです．さらに，理論はすべて机上の空論です．空論でないものは，その場限りの賞味期限のすぐ切れる約束ごとだけです．そして，すべての机上の空論は，机上の空論だからこそ，いつかは何らかの技術に応用されます．**絶対役に立たないようなことを考える方がむずかしい**です．

問． 現代のコンピュータ技術を使えば，２変数関数は関数を入力するだけで教科書のようなグラフを求めることができるのですか？４次元５次元やそれ以上のもののグラフ化は可能でしょうか？

答． 求められます．ありふれたコンピュータ・ソフトでできます．４次元５次元やそれ以上のもののグラフ化は可能です．たとえば，アニメーションは，４次元をグラフ化 (図形化) したものですね．

問． 適当な式を入れると立体的なグラフが書かれるソフトでも，偏微分をコンピュータで処理してグラフを作成しているのでしょうか？

答． 偏微分を考慮しなくても，コンピュータの容量を惜しまなければ，単に点をプロットするだけなので図は描けます．ただし，偏微分も考慮すると，より簡単に図が描けます．それはコンピュータの容量のかなりの節約であると同時に，人間の思考時間のかなりの節約にもなります．このような理論を考慮できてはじめて，(コンピュータにはできない) 人間特有の発想の飛躍が望めることにもなります．

問． 世界は数学的に処理しきることはできるのでしょうか？偏微分のグラフを見て，世界のあらゆる形あるものの外面の形状は，すべて数学的に処理可能である (かもしれない) と思いましたが，生き物，とくにヒトの内面は数学という手段で完全に処理，または表現することができると思いますか？また，無理ならば，どこまでは数学で処理でき得ると思いますか？

答．「世界」とは何か，ということが明確でないので，何とも言えません．たとえば,「ヒトの内面」と言っても漠然としていますね．数学で解明できることもあれば，解明できないこともある，と考えておくのが健全でしょう．とはいえ，もし皆さんが，まだ誰も数学を応用していない分野に，数学を使って見せたら，それはもう，世界の注目の的になります．(逆に，数学が使えることがわかりきっているような分野に数学をただ使って見せても，陳腐なだけで誰も感心しません．それは通常の経済活動でも同じことで，すでに売れているものを２番煎じで作ってみても，その企業は特許料を支払うだけで四苦八苦ですね)．使えるかどうかのぎりぎりのところで頭を使って楽しみながら頑張る，それが学問の醍醐味であり，あるいは (これからの) 企業の生命線なのだと思います．

問． 教科書でやらずに終わってしまった分は，自分で補っておいた方がいいですよね？// 講義が予定のところまで進まなかった場合，残りの部分は自分でやっておかなければいけないのでしょうか？後期の講義で続きからやってもらうことができるのでしょうか？

答． もちろん自分で補った方がよいです．試験範囲は講義で扱った部分に限りますが，残りの部分に自分で目を通しておけば，皆さんの将来のために役立ちます．この講義では，自分で微分を考えられる能力が身に着くよう指導したので，大丈夫ですね．後期は，気分も新たに積分の話になると思います．ともかく，試験では全力を尽くしてください：Why don't you do your best? では，また逢う機会までごきげんよう，さようなら．