微分積分学１ (１年４０組) 質問に対する回答

No.4 (２００４年６月７日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項です．**テストは７月２６日 (月) の講義時間帯に行う予定です．時間は９０分 (予定)，試験範囲は，講義で扱った内容です．(この回答書の内容も当然入ります)．詳細については，後日お知らせ・掲示します．都合の悪い人は，私 (石川) になるべく早めに連絡してください**．

今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，いままでの回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に載せてあります．参考にしてください．

問．テーラーの定理はどういうふうに使うかを教えて下さい．

答．こんにちは．では回答ですが，テーラーの定理を具体的な関数，たとえば，$f(x)=e^x$ とか，$f(x)=\sin x$ とか，$f(x)=\cos x$ とか，$f(x)=(1+x)^\alpha$ などに適用して，それらの**関数のことをより詳しく知る**ために使います．

問．テーラーの定理がわかりません．一般化するとよけいにわからなくなってしまいます．

答．確かに，平均値の定理は，図示できて，まだ分かりやすいですが，テーラーの定理は，図示するのが難しく分かりづらいですね．でも，微分の話で，これ以上難しい話はないので，早く慣れるようにしてください．一般化すると，わからなくなるのは当然なのですが，そのうち，一般化したおかげで分かった，という時がくると思います．

問．テーラーの定理は「高次微分係数を使って関数を精密に表現・近似すること」ということですが,「関数を表現・近似する」という概念がわかりません．// 微分と近似とが結びつきにくいのですがどうしたらよいですか？

答．具体例で説明します．関数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ は簡単な式で表された関数ですね．これを，分数式ではなくて，x の多項式 (整式) で近似しましょう．(微分の話とは関係なく，ただの式の計算で) 簡単にわかるように，$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ が成り立ちますね．(確かめてみてください)．いま，x が十分小さいとします．たとえば，$x=10^{-100}$ とすると，$x^n=10^{-100n}$ なのに比べて，最後の項 $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ は，ほぼ $10^{-100(n+1)}=10^{-100n}\cdot 10^{-100}$ で，比べ物にならないくらい小さな値になります．したがって，$\frac{1}{1-x}$ の n 次近似式は，$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n$ であると言えます．一般に，この近似式をどう決めたらよいか，ということを教えているのがテーラーの定理 (あるいはマクローリンの定理) です．さて，自然数 n を決めたときに，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+R(x)$ という形に表して，誤差 $R(x)$ が (x が小さいときに) なるべく "小さく" なるように試みます．具体的に $R(0)=0, R'(0)=0, R''(0)=0,\dots,R^{(n)}(0)=0$ になるように誤差を小さくなるように要請したとします．このとき，係数 $a_0,a_1,a_2,\dots$ が，実は微分と関係して定まるのです．$x=0$ を代入することで，$f(0)=a_0$ となるのは，すぐわかります．さらに，$f'(x)=a_1+a_2(2x)+a_3(3x^2)+a_4(4x^3)+\cdots+a_n(nx^{n-1})+R'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+R'(x)$ なので，$x=0$ を入れると，$f'(0)=a_1$ と決まります．(ここで，$a_0,a_1,a_2,\dots$ は定数であることに注意)．次に，$f''(x)=2a_2+3a_3(2x)+4a_4(3x^2)+\cdots+na_n(n-1)x^{n-2}+R''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+R''(x)$ なので，$x=0$ を入れると，$f''(0)=2a_2=2!a_2$ と求められます．さらに，$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+R'''(x)$ となり，$x=0$ を入れると，$f'''(0)=3\cdot 2a_3=3!a_3$ となります．同様に，$a_0=f(0), a_1=f'(0), a_2=\frac{f''(0)}{2!}, a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\dots$ という具合に定まっていきます．これが，テーラーの定理に現れる係数です．$f(x)=\frac{1}{1-x}$ の場合は，$f^{(k)}(0)=k!$ となることがわかるので，結局 $a_0=1, a_1=1, a_2=1, a_3=1,\dots$ となったわけです．

問．テーラーの定理の証明 (教科書 p.47) がよく分かりません．どうして，このような多項式を利用するのですか？

答．直前の回答にあるような考察から類推はできると思います．いろいろな考察の末にたどりついた簡潔な証明なので．よく鑑賞してみてください．

問．テーラーの定理に対して $n\to\infty$ としたらどうなりますか？

答．無限級数ができます．それが「**テーラー級数**」(Taylor series) というものです．

問．高校では，２回微分したときの増減表で，$\nearrow,\searrow$ でなくて，丸い矢印 (計４種類) を使っていたのですが，それでいいでしょうか？// 公式の書き方として許されるのですか？

答．もちろん使って良いです．文章で「**下に凸**」「**上に凸**」と書いても良いし，簡潔な記号で表しても，どちらでも良いです．要するに大切なのは中身です．ただし，今回，丸まった矢印を，私 (石川) の技量では印刷できませんでした．特別な記号を使うと，非公式とは言わないまでも,「印刷屋泣かせ」になるかもしれませんね．

問．なぜ関数を２回微分すると**変曲点**が出るのですか？

答．関数のグラフと,「接線」という１回微分で表されるものとの差，その差の微視的変化の情報を調べるために，もう１回微分するので，結局，２回微分が出てくるわけです．ところで，２回微分すると変曲点が出る，と言うよりも,「"２回微分 $=0$" という方程式を解いて，変曲点の候補が見つかる」と言った方がより正確です．

問．関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，曲線の傾きを，２次導関数 $f''(x)$ は変曲点を表しますが，３次導関数 $f'''(x)$ や４次導関数 $f''''(x)$ は何を表すのですか？

答．$f''(x)$ は関数のグラフの傾きの変化を，$f'''(x)$ は関数のグラフの傾きの変化の変化を，$f''''(x)$ は関数のグラフの傾きの変化の変化の変化を表します．たとえば,「世界のキリンの減少率の増加傾向がピークをむかえた」という表現には３次導関数が使われているようですね．とにかく，一般に考えておけば，誰かの役に立つかもしれないし，せっかく一般に考えられるなら，ためらわないで考えておくのが道理というものですね．

問．$y=\frac{\log x}{x}$ のグラフを書くとしたら，どうなるのですか？$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}$ と $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ がわかりません．

答．ロピタルの定理が使えます．試験問題だと思って，ロピタルの定理を使って，極限値を求めてみてください．

問．教科書 p.97 の例題 2.2.4 の $\lim_{x\to+0}x^x=1$ の解説がわかりません．$y=e^{\log y}$ とおきなおすのはどうしてですか？

答．対数をとってロピタルの定理を応用しているので，y より先に，まず $\log y$ の極限値が求められるからです．

問．教科書 p.36 ℓ.6 で，1^∞ が**不定形**ということに納得がいきません．

答．たとえば，$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ を考えてみましょう．$x\to 1$ であり，$\frac{1}{x-1}\to\infty$ です．たとえば，極限値は "$1^\infty=1$" としてよいでしょうか？ちゃんと計算すると，$y=x^{\frac{1}{x-1}}$ とおいて，両辺の対数をとると，$\log y=\frac{\log x}{x-1}$ なので，$\lim_{x\to 1}\log y=$

$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$ となり，$\log y$ が 1 に近付くので，$y = e^{\log y}$ は e に近付きます．(ロピタルの定理を使わなくても，以前紹介した公式 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を使っても求められます).

問． ロピタルの定理が利用できない場合とはどういう場合ですか？

答． 不定型でない場合です．つまり，そのまま極限値が求められる場合です．そのときは，ロピタルの定理が使えないし，使う必要もありません．

問． 微分すると連続でなくなる関数のイメージが分かりにくいです．

答． 良い質問ですね．$f(x)$ が微分可能だが，$f'(x)$ が連続でないようなものの具体例はなかなか見つかりませんが，たとえば，$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, (x \neq 0), f(0) = 0$ で定まる関数はそうような例です．実際，$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, (x \neq 0), f'(0) = 0$ と導関数が定まりますが，これは $x = 0$ で連続ではありません．

問．ライプニッツの公式で 「f, g が開区間 I で n 回微分可能なとき，積 $f \cdot g$ も I で n 回微分可能」ということは，どうして言えるのかわかりません．

答． 積の微分公式からわかります．つまり，f, g が１回微分可能なら，$f \cdot g$ も１回微分可能で，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ です．２回微分なら，この論法をもう一度当てはめます．以下同様です．(正確には，数学的帰納法で証明します).

問． n 回微分可能な関数とは，n 次の関数という意味ですか？

答． いえ，違います．たとえば，e^x は，無限級数で表わされる関数であり，多項式ではありません．でも，無限回微分可能であり，したがって，どんな n に関しても n 回微分可能です．(「n 次多項式ならば n 回微分可能である」と言うのは正しいです).

問． 教科書 p.40 に「n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続な関数 $f(x)$ を n 回連続微分可能な関数，何回でも微分できる関数を無限回微分可能な関数」と書いてありますが，前者では連続であることも言及しているのに，後者では，なぜないのでしょうか？

答． なるほど．いくらでも微分できるということは，どの導関数も連続なのであえて言う必要がない，ということです．(微分可能 $\Rightarrow$ 連続).

問． ２次導関数を $\frac{d^2y}{dx^2}$ と表すのはなぜですか．$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y$ というイメージです，とのことですが，よく分かりません．特に d の意味がよく分かりません．// $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y$ なら，$\frac{d^2y}{(dx)^2}$ となるはずではないでしょうか？

答． d 単独では意味がなくて，あくまで，$\frac{d}{dx}$ という固まりで考えています．$(dx)^2$ が dx^2 となったのは，単にかっこをつけるのが面倒だったからですかね．ともかく昔からの慣習です．

問． $\binom{n}{2}$ と ${}_nC_2$ の使い分けについて少し説明がほしいです．// $\binom{n}{1}$ と行列は関係がありますか？

答． 使いわけません．どちらでも同じです．また，行列とは見た目が似ているだけで，まったく関係ありません．

問． 微分不可能な関数とはどのようなものですか？定数関数は，微分不可能と認識してもよいのですか？

答． 定数関数は微分できます．微分不可能な関数の例は $y = |x|$ です．$x = 0$ で微分可能ではありません．

問． なぜ合成関数の微分で分数のように扱ってよいのですか？

答． それが合成関数の微分公式です．証明されている事項ですので，安心して使ってください．

問． 僕は選択科目でも微積分をとっているのですが，そこで今，微分方程式の分野をあつかっています．先生は微分方程式についてどういう定義を持っていますか？

答． 「導関数たちの入った方程式のこと」だと了解しています．

問． 変曲点について，受験生時代に発見したことがあります．たとえば，$y = 3x^3 - x$ の式のグラフで，変曲点，極大値，極小値，極値をとるときの y の値を x 軸に平行に引いた線とグラフの交点の５つの点から作られる４つの区間の長さが等しくなるのです．(すべて $\frac{1}{3}$)．これは，極大値と極小値を１つもつグラフならすべてそうなるのでしょうか？

答． 良く見つけましたね．私 (石川) にはわかりませんが，$f(x)$ が奇関数であること，つまり，$f(-x) = -f(x)$ という対称性があることと関係していると思われます．ともかく，他のいろいろな例で法則を確かめる，というのが科学的精神ですので，調べてみてください．わかったら教えてください．

問． 必要・十分条件がよくわかりません．高校の先生は，この定義が日本に来たときに，日本人が訳をまちがえてわかりづらくなった，と言っていました．

答． そうですか．「P ならば Q」のとき，Q は P であるための必要条件，P は Q であるための十分条件，というわけですが，他の言い回しが思い浮かびません．それに，英語でも necessary condition, sufficient condition というので同じようなものです．私 (石川) の意見では，要するに，**日常使っている意味と数学で使っている意味にずれがあるので難しい**のではないかと思います．

問． 定理や公式は，まず具体的な問題をいくつも解いて，次に予想をたてて一般化しても一致するか確認して出来上がるものと予測できるのですが，その逆で「まず何か定理や公式を仮定して，それから新しい具体的な問題にあてはまるから採用した」という感じで作られるものはあるのでしょうか？

答． いろいろあります．つまり，だんだん見つかっていく定理もあれば，突然見つかる定理もあります．いろいろなんです．

問． 教科書には既に証明された定理がたくさん載っていますが，新しく提唱された定理に対し，数学者達はそれを正しいと証明しようと動くのですか，それとも正しくないと証明しようと動くのですか？また，その定理が正式に正しいとされるには，どのようなプロセス (国際機関の承認?など) が必要ですか？現在進行形で正しい正しくない，ということが議論されている定理はありますか？

答． これもいろいろです．何事も，証明しようとしたり，反例 (その定理が正しくないことを示す具体例) を見つけようとしたり，いつも行ったり来たりです．ところで，”定理”が正しいかどうかは，専門家がその証明を検討して，判定するのが普通です．また，証明が与えられていなくて，正しいか正しくないかがまだ分からない “定理” を，通常は “予想” と喚びます．有名な予想としては,「リーマン予想」(あるいは「リーマン仮説」とも呼ぶ) や「ポアンカレ予想」などがあります．

問． 次回どこまでいくかを，そのつど教えてください．

答． 教えたいのですが，なかなか予定が立たないので，難しいですね．だたし，**第２章が終わったら，次は第４章の「偏微分」に進むので注意してください**．ではまた．