微分積分学１ (１年４０組) 質問に対する回答

No. 3 (２００４年5月１７日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項です．微分積分１ (石川) は，**来週 (５月３１日 (月)) は休講です** (出張のため)．悪しからず．各自予習復習をしておいてください．
連絡事項です．**テストは７月２６日 (月) の講義時間帯に行う予定です．時間は９０分 (予定)，試験範囲は，講義で扱った内容です．詳細については，後日お知らせ・掲示します．都合の悪い人は，私 (石川) になるべく早めに連絡してください**．
今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，いままでの回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に載せてあります．参考にしてください．

問． **平均値の定理**は，どのように応用されるのですか？

答． こんにちは．さて回答ですが，最終的に，**微分の神髄「テイラー展開」**を導くことができます．その他いろいろ応用があります．それらを講義で順次説明していきます．乞う御期待！

問． 平均値の定理を考えた人は，なぜその定理を考えたのですか？

答． だれが平均値の定理を考えたかは知りませんが，予想するに，ニュートンやライプニッツの創った微積分学に磨きをかけ，理論を洗練させ，すっきりしたものにするために，あみ出されたものだと思います．泥臭さがとれて，微妙に都会のにおいがしませんか？

問． ロルの定理で，もし直線だった場合はどうなるのですか？

答． グラフが直線の場合も，微分可能であり (なめらかであり)，ロルの定理が成り立ちます．確かめてください．

問． ロルの定理や平均値の定理の仮定で，$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で，かつ，(a,b) で微分可能にする理由がよく分かりません．

答． 十分条件です．ともかく，a,b の間にある c，つまり，(a,b) に属する c について $f'(c)$ が存在しないと，定理の主張自体に意味がなくなりますね．だから，($[a,b]$ で連続，という条件に加えて) (a,b) で微分可能，という条件も仮定しています．

問． 高校時代に平均値の定理を習った時に，θ を使ったような式も見たのですが，それについても詳しく知りたいです．

答． たぶん，$c = a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1$ と表すことだと思います．同じことです．

問． 微分は不思議ですね．微分を使って，色々な方法を行使することによって，極限を求めたりします．たとえば，平均値の定理や**ロピタルの定理**などです．特にロピタルの定理は不思議です．分母と分子を微分して，極限が求められる形になれば，それが極限になってしまうなんで，すごいと思います．

答． そうですね．平均値の定理の威力ですね．

問． 教科書，授業では $f(x)$ が $x = c$ で**極値**をもつなら $f'(c) = 0$ なのですが，高校 (予備校) では $f'(c) = 0$ なら $f(x)$ が $x = c$ で極値をもつ，と習ったような気がします．少なくとも入試の範囲では後者をよく使ってきました．後者は正しいですか？反例があったりしますか？

答． 正しくないです．誤解です．反例があります．「$f'(c) = 0$ なら $f(x)$ が $x = c$ で極値をもつ」とは絶対に習っていないと思います．無事，北大に合格できてよかったですね！それはともかく，たとえば，$y = x^3$ を考えてみましょう．$y' = 3x^2$ なので，$x = 0$ で $y' = 0$ となります．でも，$x = 0$ で $y = x^3$ は極値をとりません．(極大でも極小でもない)．このように反例があります．

問． **極大値，極小値**の定義がよくわかりません．傾きが変わるところが極値なのでしょうか？高校のころは無条件に「$f'(x) = 0$ のときが極値なんだ」と思っていたところがあります．

答． 定義を書きます．$f(x)$ が $x = c$ で極大値をとる，とは，c に十分近い x ($x \neq c$) に対し $f(c) > f(x)$ が成り立つということです．つまり，$x = c$ の近くでは，$f(c)$ が他の値よりも大きくなっている，グラフが山の頂きの状態である，ということです．極小値は，不等式の向きを逆にすれば同じ様に定義されます．$f'(c) = 0$ は $x = c$ で極値をとるための必要条件です．(十分条件ではない)．(なお，上の定義で，等号も許した場合，広義の極大値，広義の極小値，言います．最大値や最小値は，広義の極大値，広義の極小値である，というのが正確です)．

問． $\frac{dy}{dx}$ は速度であり，$\frac{d^2y}{dx^2}$ は加速度を表します．なぜ，これらを求めることで，グラフの曲線の極値，**凹凸，変曲点**を知ることができるのでしょうか？とくに，加速度と変曲点のつながりが分かりません．

答． グラフの凹凸や変曲点は，グラフと接線との位置関係で定まるものです．グラフ $y = f(x)$ と $x = a$ での接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ は，$x = a$ で同じ１階微分係数を持ちます．(両方を微分して，$x = c$ を

放り込んでみてください)．それで，２階微分まで調べて，位置関係を判定するわけです．加速度は，速度の変化の度合いであり，幾何的に言えば，接線の傾きの変化の度合いなので，グラフの形を調べることにも使えるわけです．

問． 講義では，たとえば，$(\mathrm{Sin}^{-1}x)'$ を考えるときに，$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲をそのまま説明していましたが，$y = \pm\frac{\pi}{2}$ は $\cos y = 0$ となって，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ とできなくなります．$y = \pm\frac{\pi}{2}$ の場合には，他の説明が必要だと思います．$(\mathrm{Cos}^{-1}x)'$ のときも，$y = 0, \pi$ の場合を除かなければならないと思います．

答． すばらしい．その通りです．講義では私 (石川) がうっかり等号をつけたまま説明してしまいました．**訂正します**．$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1)$ です．(つまり，$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)．同じく，$(\mathrm{Cos}^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1)$ です．(つまり，$0 < y < \pi$)．$x = \pm 1$ では，微分不可能です．指摘してくれてありがとう．

問． $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ から $\sin y = x$ を導くのはどうやったのでしょうか？

答． アークサインの定義どおりです．$\sin$ の逆関数が Sin^{-1} なので，$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ は，y のサインが x ということで，それを書いたわけです．

問． 演習プリントで，$y = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}$ の導関数を直接求めるやり方を教えてください．

答． はい．$\frac{x}{2}$ のアークサインが y なので，$\sin y = \frac{x}{2}$ です．両辺を x で微分して，$(\cos y)y' = \frac{1}{2}$，よって，$y' = \frac{1}{2\cos y}$ で，あとは，これを $\sin y$ で表し，$\sin y = \frac{x}{2}$ を代入すればよいです．

問． 演習問題のプリントで $4\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}$ を微分すると $\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ になるのはなぜですか？

答． $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}$ は，アークサインの中に $\frac{x}{2}$ が入っているので，合成関数です．**合成関数の微分公式**を使えば $(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ となるからです．

問． 対数と逆３角関数の合成関数の x の範囲はどうなるのでしょうか？

答． なるほど．良い質問ですね．とくに指定がないかぎり，その式が完全に意味をもつような範囲で考えます．たとえば，$\log \mathrm{Sin}^{-1}x$ なら，$\mathrm{Sin}^{-1}x > 0$ である範囲，つまり，$0 < x \leq 1$ が範囲になります．

問． $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$ となるときに符号の有無は考えないのですか？

答． 考えています．$\cos y \geq 0$ の範囲で考えています．

問． 逆３角関数で $x = \mathrm{Sin}^{-1}y$ の値の範囲が固定されていますが，なぜですか？

答． 単調な部分なら何処でも良いのですが，一番頻繁に使われている範囲を指定しています．慣習です．

問． $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ を微分せよ，という問題の解き方がわかりません．

答． $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ とおいて，**両辺の対数をとってから微分**するとよいです．つまり，$\log y = \frac{1}{2}\{\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4)\}$ としてから，両辺を x で微分してみると解けます．

問． $e^{\log x} = x$ というのを説明してください．

答． $\log x$ (**自然対数**) の定義からわかります．$\log x$ という数は，e の "それ" 乗 (じょう) が x になる数，というのが定義だからです．

問． **双曲線関数**はなぜ定義されたのですか？

答． 双曲線を表示するためです．$x = \cos t, y = \sin t$ は円の助変数表示ですが，$x = \cosh t (= \frac{e^t + e^{-t}}{2}), y = \sinh t (= \frac{e^t - e^{-t}}{2})$ (教科書 p.19 参照) とおくと，$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$, つまり，$x^2 - y^2 = 1$ が成り立ち，双曲線を表します．

問． 最大値，最小値をとるのは，グラフ上における点なのですか？

答． いえ，違います．x 軸上の点で，です．値は y 軸の上にあります．$y = f(x)$ について，$x = c$ で最大値 $y = f(c)$ をとる，などと言います．

問． 教科書 p.25 のように，逆関数と逆数の両方の意味で,「マイナス１乗」の記号が多用されると，非常に分かりづらいのですが，他の表記法はないのでしょうか？

答． 残念ながらありません．講義では，紛らわしい記号はなるべく使わないように工夫しています．でも，慣れれば文脈からすぐに分かるようになるので，ひとまずご安心を．

問． 中学の時の教科書に,「$\frac{1}{3} \times 3 = 1$ であるが，$\frac{1}{3} \times 3 = 0.333\cdots \times 3 = 0.999\cdots$ でもあり，これはどういうことか」というのが出ていました．その時は，極限のことなど全く知らないので，数学は難しいんだなと思って通りすぎてしまいましたが，今よく考えてみると，極限と関係があるような気がします．$0.999\cdots$ は限りなく 1 に近い数であり極限は 1 なので，$\frac{1}{3} \times 3 = 0.999\cdots = 1$ と言われてしまえばそれまでなのですが，本当にこれでおわりなのでしょうか？なんとなく腑に落ちません．

答． **無限小数は，実は数列の極限値を表しています**．$0.999\cdots$ というのは「限りなく 1 に近い数」と

いうよりも，限りなく 1 に近付く数列の極限値を表す記号です．つまり，限りなく 1 に近付く数列というのは，$a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, a_3 = 0.999, a_4 = 0.9999, \ldots$，という数列です．そして，無限小数 $0.999\cdots$ は，その極限値を表す記号なので，1 そのものを表すわけです．

問．ε **論法**がよくわかりません．

答．たとえば，数列の極限値のところで，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは，a_n が α に限りなく近づくこと，と説明しました．でも「限りなく近づく，とはどういうこと？」と質問されたとき，どう答えたら良いでしょうか？「番号 n を大きくすれば，a_n と α の差がいくらでも小さくできる」ということです．では,「いくらでも小さくできる，ってどういうこと？」と聞かれたら，どう答えますか？「たとえば，番号を大きくとれば，a_n と α の差が $\frac{1}{100}$ より小さくできることだ」と説明すれば，どうして，$\frac{1}{100}$ なのか？$\frac{1}{1000}$ でもよいのか？と聞かれます．そうだ．$\frac{1}{10000}$ でもよい．それに応じて，番号を十分大きくとればよいのだ．任意の正の数 ε でよいのか？そうだ．任意の正の数 $\varepsilon > 0$ が指定された時点で，番号を十分大きくとれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ とできるのだ.「番号を十分大きく」とはどういうことだ？ある大きな番号 n_0 から先の番号全部，ということだ．つまり，$n_0 \leqq n$ ならば，ということだ．その最初の番号 n_0 は，ε で変わるわけだな？そうだ．つまり,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ε に応じて，番号 n_0 があって，$n_0 \leqq n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」ということさ．という具合に，極限の定義を明確にし議論する方法です．ε **論法は対話式論法です**．数列や関数に極限値があるかどうか，どういう極限値を持つか，詳しく知りたいが，状況がとても複雑で，直感ではどうにもならない時に，ε 論法は特に力を発揮します．ε 論法は，ε-δ 論法とも呼びます．実数の基本的な性質だけから説き起こす論法なので，誰でも，どんな相手に対しても，**宇宙人でさえも説得できる論法**です．

問．はさみうちの原理がよくわかりません．

答．たとえば,「$0 \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$」ということですね．$\varepsilon$ 論法で証明してみましょう．結論を書き換えると,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 n_0 があって，$n_0 \leqq n$ ならば $|c_n| < \varepsilon$」となります．これを示しましょう．仮定から $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ なので,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 n_0 があって，$n_0 \leqq n$ ならば $|b_n| < \varepsilon$」が成り立ちます．ところが，やはり仮定から，$|c_n| \leqq |b_n|$ なので，$|b_n| < \varepsilon$ ということから，$|c_n| < \varepsilon$ が導かれます．証明おわりです！

問．あらゆる現象は全て数式で表されるというのは本当ですか？

答．「あらゆる現象」の意味がはっきりしていないので，何とも言えません．多分，言い過ぎでしょう．でも，多くの現象の背景に数学があり，数学を使ってそれらの現象が説明されているのは確かです．**それが科学というものです**ね．

問．自分で問題を解くときは，関数が連続関数であること，微分可能であることについてことわってから微分した方がよいのですか？

答．もちろんことわった方がより丁寧ですが，通常，そこまで答えることは要求されません．たとえば，微分せよ，という問題の場合は，微分できることはわかっているものについて具体的に導関数がどうなるかということを問うているからです．ただし，微分可能かどうか調べよ，という設問なら，当然，微分可能かどうか調べなくてはいけません．

問．質問ではないのですが，**ちょっとした発見**をしました：$(a^x)' = a^x$ となる正の実数を探ります．定義より，$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$．よって，$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となる a を探せばよい．変形していくと，$\lim_{h\to 0}(a^h - 1) = \lim_{h\to 0} h$, $\lim_{h\to 0} a^h = \lim_{h\to 0}(h+1)$, $\lim_{h\to 0} a = \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$, よって，$a = \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$．ここで，変形のしかたが気持的には分かるけれど，数学的にはおかしな式になっていると思いますが，どう表記したらよいのでしょうか？

答．なるほど，良く考えましたね．修正すべきところは，$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ から $\lim_{h\to 0}(a^h - 1) = \lim_{h\to 0} h$ と変形する部分です．(後の方の式は，単に $0 = 0$ ということで，大切な情報が逃げてしまいます)．そこで，$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ のところで，$k = a^h - 1$ とおくと，$h \to 0$ のとき，$k \to 0$ となり，$h = \log_a(1+k)$ となり，$\lim_{k\to 0} \frac{k}{\log_a(k+1)} = 1$ となります．この式を変形していけば，$a = \lim_{k\to 0}(k+1)^{\frac{1}{k}} = \lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}$ を導くことができると思います．ぜひ，試みてください．

問．どうしたら数学が得意になりますか？数学の勉強というと問題集などをこなすことくらいしか思い浮かばないので，今までと何らかわりません．解く量が足りていないのでしょうか？

答．そうです，問題を解くことは，数学が得意になる早道です．ただし，そこで注意したいのは，**解く量よりも，解く質ですね．解き方です**．最近，ファースト・フードではなくて，スロー・フードが見直されていますが，数学の問題も，少ない問題をゆっくり解く，丁寧に解く，ということが大切です．**ゆっくり解いているうちに，数学がわかるようになり，解くのが楽しくなり，馴染んできて，結局，早く問題解決ができるようになる**，ということだと思います．まず，**１題１題を丁寧に解いてください**．一期一会．ではまた．