微分積分学１ (１年４０組) 質問に対する回答

No. 2 (２００４年４月２６日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． 逆関数をとれるのはどうして単調な部分だけなのですか？

答． こんにちは．単調な毎日だから，結果を見て原因をさぐる科学が発展できるのかな，と考える今日この頃，いかがお過ごしですか．さて，回答ですが，単調でないと，式 $y = f(x)$ から x について，１通りに解けない (１価関数にならない) からです．

問． 逆３角関数で $\sin, \cos, \tan$ の範囲が異なるのはなぜですか？$\sin$ の場合，$-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を選んでいますが，2π が周期なので，全てのグラフを表していないと思いますが，それで良しとしているのはなぜですか？

答． 逆関数を考えるためです．この講義では扱いませんが，「**多価関数**」という，普通の意味の関数より，広い意味のものがあります．多価関数でよければ，$\sin$ の範囲を $(-\infty, \infty)$ 全体に取ることができます．しかし，われわれは，あくまで「**１価関数**」だけを扱っているので，単調な範囲に限定しているわけです．

問． 逆関数は何のためにあるのでしょうか？$\mathrm{Sin}^{-1}, \mathrm{Cos}^{-1}, \mathrm{Tan}^{-1}$ の意義について詳しく教えてください．// どうして逆関数というものを求めることが必要になるのでしょうか？高校時代で習った時は逆関数なんでただのパズルだと思っていたので，大学の授業で出てきて正直驚かされました．大学の授業で出されるほど重要なものだったのなら，ぜひどういったいきさつで発見され，実用されるのかを知りたいものです．

答． 役に立つから考えます．たとえば逆３角関数は，積分のところで役に立つので考えます．ところで，「パズル」というのはよい指摘です．「逆を考える」ということは，誰でもできる手軽なことで，そしてしばしば役に立つ方法なわけです．

問． 逆関数のとき，$y =$ の式にするのはなぜですか?例えば，$y = e^x$ の式を $x =$ の式で表すと，$x = \log y$ になりますが，それを $y =$ の式 $y = \log x$ にしたものを逆関数としています．逆関数というなら，x と y が入れかわっていた方がいいのではないでしょうか？

答． 単なる習慣 (あるいは慣習) です．つまり関数を $y = f(x)$ と表すという習慣によっているだけです．気にしないでください．ところで考えてみると，逆関数というのは，相手がいて，その相手から見たら逆関数，ということであり，自分の方から見たら，相手の方が逆関数になります．たとえば，$y = e^x$ は $y = \log x$ の逆関数です．つまり，お互い様ということです．

問． 感想ですが，行列でも逆行列をインバースと言いますが，関数のインバースと行列のインバースは，ニュアンスが多少違ってくるのかなと思いました．

答． 感想ですが，良いところに気がつきましたね．同じニュアンスです．**行列を線形写像と考えたときに，その「逆」写像を表すのが「逆」行列**だからです．

問． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の証明の仕方についてですが，変な図を用いて強引に $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ の不等式を導き出しています．高校でもそのようにやっていましたが，大学でもこうするのかと思いました．

答． なるほど．皆さんが，これから微分積分をしっかり勉強していけば，いずれ $\sin x$ の定義にさかのぼった別の説明が自力でできるようになると思います．それまで修行しておいてください．

問． $x \to 0$ のとき，$\dfrac{\sin x}{x}$ が 1 に近づくのは，故意に $\sin x$ がそのように作られたからですか？$\sin x$ を数学の１つとしてつくった後に，たまたま波動の分野にも利用できると気付いたのですか？

答． たまたまです．でも，$\dfrac{\sin x}{x}$ が 1 に近づくということは，「単位円の点 $(1, 0)$ の近くを顕微鏡で拡大して見れば，ほぼ縦線に見える」ということで，直観的にも納得できることですね．

問． なぜ，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ が 1 ではなくて 3 なのですか？

答． x が小さくなっていくとき，$3x$ は x の３倍のまま小さくなっていくからです．$\dfrac{\sin 3x}{3x}$ は 1 に近付いていくので，$\dfrac{\sin 3x}{x} = 3 \times \dfrac{\sin 3x}{3x}$ は 3 に近付きます．

問． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ は何かに収束しますか？もしかしたら ∞ に近づきますか？

答． 発散します．$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\cos x}{x} = \infty$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\cos x}{x} = -\infty$ です．$y = \dfrac{\cos x}{x}$ のグラフを書いてみるとよいです．

問． 弧の長さと角の表記が同じなのはどうしてですか？

答． 弧の長さで角度を表しているからです．それが弧度法です．

問． ３角関数は，いつから，どのようにして使われるようになったのでしょう？

答． ３角関数の起源は,「３角比」で，紀元前の時代から，測量などで重宝されていたと言われています．

問． 自然対数の底 e とは何ですか？// e の特殊性は何ですか？// ネピア数 e の意義がわかりません．

答． 理論的な説明は，$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ です．微分と関連した説明をすると，極限値 $\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = 1$ となるような数 a (ただし，$a > 0, a \neq 1$) として数 e を特徴付けることもできます．講義では,「**微分積分学では，数 e は，円周率 π よりも重要な程だ**」と説明しましたが，それは，関数の微分を考える上で e が重要だからです．微分で重要なので，積分でも重要です．したがって，たとえば微分方程式は，数 e を使わないと解けません．

問． 中間値の定理のような当然ともいえる事柄を，なぜ，わざわざ定理にするのかがわかりません．

答． 重要だからです．ところで，**当然に見えることでも，本当にそれが成り立つかどうか確たる根拠がないので，それを完全保証しているのが定理です**．実際，連続な関数の中には奇妙なものの数多くあり，中間値の定理で述べていることは全然当然でない，と私 (石川) は考えます．

問． $\sin x$ や $\cos x$ は $(-\infty, \infty)$ で連続で，有界閉区間でなくても，最大値や最小値を持ちますが，このとき,「有界閉区間における最大最小の存在定理」は意味をなすのでしょうか？

答． 定理は「有界閉区間において連続な関数は最大値と最小値をもつ」と主張しているだけなので，有界閉区間でない場合には，何も主張していません．**定理には必ず前提があります**．そして，その前提が成り立っていない場合は，結論が成り立つこともあれば，結論が成り立たないこともあり，それは定理とは無関係のことです．

問． 高校のときに連続の定義は，$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ and $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ と習ったような記憶があります．それを考えると，ただの $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ では，言葉足らずな気がします．

答． 大丈夫です．$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ という条件式は，$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在して，つまり，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$ であって，それが $f(a)$ に等しいという意味だから，同じ意味になります．俳句を生んだ日本文化に親しむわれわれとしては，簡潔もよし，もちろん，冗長も悪くなし，といったところでしょうか．

問． 双曲線になる関数は連続ですか？

答． 双曲線の式 $x^2 - y^2 = 1$ を y について解くと，$y = \pm\sqrt{x^2-1}$ (ただし $x^2 \geq 1$) となり，x を決めても y が１通りに決まりません．こういう場合は,「多価関数」と言います．微分積分では，関数という場合は,「一価関数」だけを指します．連続関数の定義も，一価関数について定義しています．したがって，たとえば，$y = \sqrt{x^2-1}$ (ただし $x^2 \geq 1$) と指定した後は，これは連続であると言えます．

問． $a\log x = \log x^a$ の変形がよくわりません．

答． $e^{a\log x} = (e^{\log x})^a = x^a$ だからです．

問． $a_n = \frac{1}{n}$ は $n \to 0$ のとき，$a_n \to \infty$ となるので有界ではないと思います．

答． a_n は数列なので，$n = 1, 2, 3, \ldots$ です．$n \to 0$ とは考えません．

問． ”$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ を示せ”という問題は知らないと解けないのでしょうか？

答． しばらく (何日か，何週間か) 試行錯誤すれば必ず解けると思います．でも，もう知ってしまったのだから問題なしですね．基本的な公式は，数少ないので，何でも自力で解こうとしないで，まず先輩の英知を素直に学んでもよいと思います．

問． 教科書 p.9 の問題 1.1 の５番の (3) 無限小数 α が循環小数ならば α は有理数であることを示せ，等，が意味不明でした．明らかなものを論理だてて説明するのが数学の難しいところだと思うのですが，いかにして論理性を得ればよいのでしょうか？

答． この場合は，まず，１つの具体例，たとえば，$0.596359635963\cdots$ が有理数 (分数) になるかどうか調べてみると，解答の意味がわかると思います．皆さん，調べてみてください．ところで,「明らかなものを論理だてて説明するのが数学」というよりも,「明らかそうなものもまったく明らかそうでないものも，すべて論理だてて説明して，それが正しいことを完全保証するのが数学」ですね．それはともかく，論理性はトレーニングすれば身につきます．つまり，慣れが肝心です．

問． 質問がないときはどうすればよいのでしょうか？やはり零点になりますか？

答． 質問が書いていないときは，残念ながら零点になります．**良く予習，復習して，質問がいつでもできるように普段から心掛けておく**，つまり質問を事前に準備しておくことをお勧めします．

問． 先生は重厚長大的考えですね．// 字を大きく書いてください．

答． ありがとうございます．重厚長大かつスマートでありたい，と常々思っていたので，うれしい限りです．// 失礼しました．字はなるべく大きく書きます．ではまた．