微分積分学１ (１年４０組) 質問に対する回答

No. 1 (２００４年4月１２日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

先週は特別に,「高校時代までの数学の内容について疑問に思っていたこと」というテーマで，質問してもらいました．その回答です．参考にしてください．(すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．)

問．微分・積分の具体的なイメージや概念といったことが分かりませんでした．導関数の意味がよくわかりませんでした．

答．こんにちは．さて回答ですが，導関数とは，関数の微視的変化を，改めて，関数として表したものです．たとえば，位置 $x(t)$ が時刻 t の関数として表されているとき，$x(t)$ を t で微分したもの $\dfrac{dx}{dt}$ は，速度を表します．ところで，講義中に,「微分は分析，積分は総合」と説明しましたが，それは，たとえると,「**微分は顕微鏡，積分は望遠鏡**」であると言えます．

問．今日の講義の中で，微分は「微視的変化」を調べるとありましたが，微分を繰り返すことで，何が分かってくるのですか？

答．微分を２回すると,「変化の仕方の変化」がわかります.「速度」の変化なので,「加速度」になります．

問．微分・積分が現実の現象をうまく説明できるのはなぜですか？たとえば，物理において，速度の式を微分すると加速度の式になる，といったものが，どうも都合良く感じてしまいます．// なぜ，数学に物理がからむのですか？高校の数学で，数学なのに物理の内容が入った加速度や速度や距離といったことをやるのかがわかりません．// 座標上の点をベクトルで表し，微分，積分等で速度の大きさや加速度を求められる理由がよく分かっていなかったです．

答．なぜでしょうね．もともと，微分積分は，いわゆる「ニュートン力学」と関係して生まれて,「解析力学」とともに整備されてきた，という事情によるのかもしれません．とはいえ，２０世紀に生まれた量子力学も，結局は微分積分の言葉に基づいて書かれています．**どうして微分積分がこんなに役に立つのか**，私 (石川) にも良くわかりません．ともかく，物理と絡めて数学を学んでいくは，良い方法です．

問．微分積分では，面積や体積を求めたりしましたが，実際何なのかわかりません．試験などで出るからやってきましたが，実践的な部分では，どのような分野で，どういう理由で，どういう手段として使われているのかがわかりません．// 微分積分が実際に活用される場面が知りたいです．微分積分など数学のいろいろな計算は，実際どのような現場で使われるのですか？// 高校時代は機械的に計算していました．// これからは，もっと意味を考えながら数学を学ぼうと思います．

答．微分積分はいろいろな分野で使われるので，ここには書き切れません．しばらく待っていてください．

問．極限の計算は，どのようにイメージすればいいのでしょうか？

答．数直線の上を点が動いていて，それがどこに近付いていくか調べる，というイメージです．

問．「不定形」とは何ですか？高校の数学で,「極限」を学んだ時に,「不定形」という言葉を聞いた気がします．

答．極限の計算 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ で，分子と分母の極限が，両方とも 0 であったり，両方とも $\pm\infty$ になって，そのままでは，極限が求められない式の形のことを言います.「不定形」という言葉は，厳密にいうと，純粋に数学の言葉ではなくて，あくまで，数学を説明する上で，話を分かりやすくするための用語です．

問．「x 軸は，原点 O における $y = x^3$ の接線であるが，$y = \tan x$ の接線ではない」ということを教わったことがありますが，いま一つ理解できませんでした．

答．$y = x^3$ のグラフを，少し精密に書くと分かります．たとえば，$x = 0.1$ とすると，$y = 0.001, x = 0.01$ とすると，$y = 0.000001$ となり，x が小さくなるとき，y はより急速に小さくなり，x 軸が接線となることが実感できます．一方，$y = \tan x$ は，x が小さいときは，ほぼ，$y = x$ と同様なグラフになります．

問．$\sin, \cos$ で，角度を π に直しますが，何のために直すのですか？たとえば，$30°$ は $\frac{\pi}{6}$ など．そもそも π とは何なのですか？// 円周率とはなんですか？

答．直した方がいろいろ便利だからです．ところで，**円周率 π とは，円の円周の長さと直径の長さの比**です．したがって，半径の長さが 1 の円 (単位円) の円周の長さは 2π と表されます．角度を $360°$ で表すのは，歴史的な意味はありますが，その 360 という数値は，割り切りやすいという利点はあるものの，根源的な意味は薄いものです．それに比べて，角度を，単位円の"弧"の長さで表す方法 (弧度法) は，より自然で，発展性のある方法です．微分積分を十分に勉強していくと，その利点がひしひしとわかってきます．

問．e や π は正確に存在するのですか？終わりがあるのですか？e も π も存在しないと不便であろうことはわかるのですが.

答．「存在する」とはどういうことか (哲学的に) 難しいですが，**数列の極限値として定まる実数**として正確に定義されています．便利なので，考えて使っている，と了解してください．

問．複素数はどんな状況で用いるのですか？実際に存在しない数なのにどうして必要なのかもわかりません．// どうして，虚数まで定義する必要があるのですか？

答．たとえば，２次方程式を解くときに用います．たとえば，$x^2 + 1 = 0$ を解くときに必要です．ところで，複素数 (虚数) も実在しませんが，実数が実在する数で，自然数は自然にある数だ，とも言い難いですね．**数というものはすべて，頭の中で考えた抽象的な存在です**．名前に惑わされないようにしましょう．

問．２次関数のグラフと直線ではさまれる図形の面積の公式 $\frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$ などが，なぜこういう式になるのかの説明を聞いたことがないので，気になります．

答．この講義を真剣に聞けば，自力で公式が導かれるようになります．

問．置換積分で，$(\ ) + \sqrt{(\ )}$ のように置換する方法が，なぜどうするのかが，わかりません．

答．微分積分 II の講義で，説明があると思います．

問．極座標の考えかたがわかりません．

答．たとえ話になりますが，札幌や京都や長安に住んでいると，わかりづらいですが，パリの凱旋門に行けば納得

できると思います．放射状に道路が延びていて，パリの地点は，凱旋門からの距離 (r) と，基準となる方向からの角度 (θ) で決まります：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

問．複素数と行列を使って，回転ができますが，それ以外にはないのですか？

答．表現方法はいろいろあると思いますが，回転は (直交) 行列を使って表現するのが一般的です．

問．写像がよく分かりません．

答．英訳は mapping すなわち「地図を作る」という意味がありますが，結局「像を写す」ということです．被写体の各点が，スクリーンの上に写される，ということです．とりあえず「関数」と同じものと理解してください．

問．確率がよくわかりません．// 確率などで場合があまりにも多いとき，解答が本当に合っているのか，疑問に思うことがあります．

答．なるほど，そうですね．ところで，この講義では確率を扱う確率はゼロですが，いずれ，皆さんが確率や統計を学ぶときに，微分積分が自由自在に使えることが不可欠になります．

問．微分方程式での問題の解き方が納得できません．具体例は，２００３年北大理系数学の第３問.

答．その問題がわからないのですが，もし，どんな問題だったか覚えていたら，次の機会に教えてください．

問．数学は実学ですか？大学の数学には実学的な要素がありますか？

答．あります．身の回りにあるすべてのものは，数学 (たとえば微分積分) を使って作られている (創られている)，といっても過言ではありません．

問．「行列」は，多次元をあつかうのに便利だと聞きました．実際に，行列を用いて行われる作業はありますか？

答．たとえば，統計の計算では，行列の計算をしますね．ところで,「多次元」は「高次元」とも言います．

問．$a_{n+2} = ka_{n+1} + \ell a_n$ のような３項間漸化式は，実生活で，どんなときに使われるのでしょうか？

答．たとえば，有名なフィボナッチ数列は，３項間漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, (a_1 = 1, a_2 = 1)$ で表されますね．フィボナッチ数列は，生物の形や黄金比などと関係しています.「実生活」ということがどういうことかわかりませんが，物を知ることも実生活のうち，だと考えれば，実生活に使われていることになります．

問．生物学で数学が必要になることはありますか？

答．生物のような「複雑なシステム」を合理的・普遍的に扱うときには，必ず数学が必要になると思います．

問．微分積分は，農学の研究分野の基礎になりますか？

答．農学について，私 (石川) はあまり詳しくないので，良くわかりませんが，微分積分は，例えば，多変量解析とか統計学とかの基礎になります．いろいろな数理モデルを作って，複雑な現象を解析するとき，一番頼りになるのが，微分積分です．

問．設計や，宇宙の解明などに，数学が深く関係しているのでしょうか？実際どの様に数学が活かされているのですか？「極限」という考え方が重要な気はするのですが.

答．関係しています．微分積分で習う「極限」とは，少しニュアンスが異なりますが,「極端な場合を考えてみる」ということは，数学の基本的な方法の１つです．

問．高校時代に学習した内容が，今後役に立つのかわかりません．// 数学は，正直のところ，受験の道具というイメージの方が強いです．今まで習った数学や，これから学ぶ数学をどういう風に実際に使っていくのか，ということを，今，思っています．

答．役に立ちます．実は，役に立つかどうか，は，皆さんが役立てようとするかどうか，ということにかかっています．期待しています．

問．大学の数学は，計算の分野ではなく，論理的な方向に進むのでしょうか？

答．両方です．計算も大切，論理も大切です．

問．ユークリッドの互除法のやり方やチェバの公式，球の体積などの求め方は，証明を教えてもらって使っていたわけではないのですが，大学では教えてもらえるのですか？

答．証明を教わる機会は結局ないかもしれません．でも，ご安心を.「微分積分」や「線形代数」や，その他の数理科学に関連した科目を**真剣に勉強していくと，自然に自分で考える力がつきます**．自力で証明できたり，証明が書いてある文献を自力で理解できるようになるので大丈夫です．安心してください．

問．高校の時，数学が一番の苦手科目だったので，どうしてこんなことをやらないといけないのかと思っていました．

答．そうでしたか，大学では，苦手意識を捨てて，数学にも親しんでみてください．

問．高校においては，中学のときから比べて，多くの証明問題がみられました．それは大学に入って更に膨大な量になると思いますが，僕は「証明」ということが今一つわかりません．時には，２行くらい書けば証明されたことになるし，何百ページにも渡るものもあります．どうすれば証明されて，どうしなかったら証明されていないのか，その部分の境界がずっと疑問でした．

答．大学で証明問題が膨大な量になる，ということはないと思います．ところで,「証明」とは何なのか，ということは，確かに難しい問題ですね．通常，その分野の専門家が，その”証明”が正しいかどうかを判定します．しかし，何年か後に，実はその”証明”が間違っていた，ということがわかった例があります．このように難しい問題です．

問．数学の力をのばすには，同じ分野を深く学ぶ (難問が解けるまでやる) のがよいのか，それとも，様々な分野を広く，ある程度学ぶのがよいのでしょうか？

答．個人差もあるし，必要度にもよるので，何とも言えませんね．２つのやり方を併用してはいかがでしょうか．

問．高校と大学での勉強法の違いはありますか？高校では，主に，先生の説明を聞いて，その後，問題演習という練習をくり返していました．大学での勉強とは，どういうものでしょうか？

答．授業の仕方は，ほぼ同じだと思います．ただし，大学で扱う内容は，当然のことながら，かなり難しくなるので，**授業の説明や教科書の説明を，自分で何度もくり返し復習しないと理解できなくなる**と思います．

問．もし，その日の授業の説明 (解説) で，わからないことがないときは，どう書いたらいいのでしょうか？

答．「わからないことがない」ということは有り得ないと思いますが，万一，わからないことがないときは，昔習ったこと，自分で予習したこと，など自分の知識を総動員して，**質問を絞り出してください**.

問．質問書の補足説明の「１００字以上」を,「８０字以上」にしてください．何を書くか考えるのに時間をかけてしまい，時間が足りなくなるかもしれないので.

答．なるほど，では，間 (あいだ) をとって，**９０字以上**にしましょう．ではまた.