微分積分学１ (１年５，１３，１４組) 質問に対する回答

No. 4 (２００４年6月１４日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項です．**テストは７月２６日 (月) の講義時間帯に行う予定です．時間は９０分 (予定)，試験範囲は，講義で扱った内容です．(この回答書の内容も当然入ります)**.

今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，いままでの回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に載せてあります．参考にしてください．

問． マクローリンの定理 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, (0<\theta<1)$ の θ はどこから来ているのですか？// n 番目だけにどうして θ が出てくるのですか？

答． 平均値の定理から出てきます．平均値の定理は，a, b に対して，$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$ となる c が a と b の間にある，というものでした．c は a と b の間にあるので，$0<\theta<1$ である数 θ を使って，$c=a+\theta(b-a)$ と表わすことができますね．つまり，$f(b)=f(a)+f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ となります．ここで，$b=x, a=0$ をあてはめると，$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$ と表示されます．ここで，θ は 0 と x の間の数で，x が変われば変わります．これがマクローリンの定理の $n=1$ の場合です．一般の場合も，証明には平均値の定理を使っていて，同じ様に θ が出てきます．

問． 剰余項 $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ は，どのようにして扱うのかがわかりません．

答． そっとしておいてあげてください．取り去ると等号が成立しません．

問． 「マクローリンの定理の番号 n は使用者が必要に応じて選ぶ」とのことですが，n が変化すると，定理として成立しないのでは？

答． 成立します．数 θ は n が変われば変わります．n が違えば，違う θ です．x が変っても θ は変わります．

問． マクローリンの定理は，n が大きければ大きいほど誤差が小さいんですよね？では，これから経済学を学ぶにあたって誤差は，どれくらいまで小さくなければ，ならないのでしょうか？n が 8 のときですら相当大変なのに，$n=100$ とか言われたら，むしろ計算ミスによって誤差が出てくるような気がします．

答． なるほど．そうです，マクローリンの定理は，n が大きければ大きいほど誤差が小さくなります．誤差がどれくらい許されるかは，状況によります．そして，かなりの精度が必要なときは，n を大きく取るわけですが，そのときの**複雑な計算は計算機にやらせれば良い**のです．計算機は，こちらの指示さえ間違わなければ，(そして計算機が故障していなければ) 正確に計算してくれます．だから大丈夫です．

問． マクローリンの定理は，何を求める時に使うのか，定理自体が何を表しているのかわかりません．丸暗記した方がいいのですか？// かなり重要な定理なのでしょうか？

答． マクローリンの定理は，関数を多項式で近似するときに使います．関数を多項式と剰余項の和として表現しています．重要な定理です．私 (石川) は「暗記しなくてもよい」と言いましたが，もちろん，もし暗記できるならして暗記してもかまいません．たとえば，**数理経済学**の教科書も開くと，マクローリンの定理は，当然のこととして使われていると思います．

問． 教科書 p.63 に書いてある $f(x)=e^x$ のテイラー展開 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, |x|<\infty$ の説明がさっぱりわかりません．// 無限に加える意味は何なのですか？

答． 「マクローリンの定理の式を，剰余項を書かないで等号にしたい，そこで n を無限まで考えでしまおう」ということです．無限級数の形なら，関数が (θ などを使わずに) 明示的に表現できるということです．有限ですませるなら剰余項が必要，剰余項がいやなら無限級数が必要，という２者選択です．関数がもともと多項式だったら良いけれど，そうではなく，e^x などのように複雑な関数については，**剰余項もいや，無限級数もいや，では虫が良すぎる**わけです．講義では，皆さんに技術的なことは気にしてほしくないので，わざと説明を省きました．

問． $|x|<\infty$ がわかりません．// $|x|<\infty$ と範囲を書かなくても，全ての数はそうで，自明なことではないですか？

答． その通りですね．著者は，他の部分の $|x|<R$ の部分の流れで，つい書いてしまった，あるいは，強調するために書いたと推測されますね．

問． 無限級数の使い道がよくわかりません．$\frac{1}{1-x}$ は複利計算に使うというのは分かったのですが．

答． 有限次まで取れば近似式として使えます．でも，無限級数では実際に使えないのではないか，と言われれば，確かにその通りかもしれません．いわば「絵に書いた餅」あるいは「無用の長物」です．床 (とこ) の間にでも飾っておいてください．ところで，皆さんが美術館に行って (たとえば，ピカソ展に行って) **ピカソの絵**を見て，ピカソの絵の使い道について，なんて考えるでしょうか？(ピカソの絵を利殖のために利用したいという人，画商などは別として)．ただ素直に単純に，美しいとか，芸術的だとか，よくわからないとか，という感想を持つのが普通だし，それで十分にピカソの絵には存在価値があります．マクローリン展開も同じことで，**素直に見て，美しいとか，芸術的だとか，よくわからないとか，感じてくれればそれで十分**です．

問． 極値は，減少から増加，または増加から減少へとトレンドが変わる点で，変曲点は，減少は減少でも，減少幅が拡大していたのが，縮小に転じる点 (または増加幅が縮小から拡大に転じる点) という定義でよろしいのでしょうか？

答． そういうことです．概念をよく説明していますね．ただし,「減少幅」という言葉は少し曖昧なので，や

はり，２階微分を使って「$x=a$ が $y=f(x)$ の変曲点とは，$x=0$ の前後で，$f''(x)$ の符号が変わるときに言う」というのが厳密です．このように，数学的に突き詰めて解析するときは，微分を使った定義を用いる必要が生じます．

問．$f''(x)>0, f''(x)<0$ は具体的にどういうことを意味しているのですか？

答．$f''(x)>0$ は $f'(x)$ が増加，$f''(x)<0$ は $f'(x)$ が減少していることを具体的に意味しています．

問．上に凸，下に凸ということと接線は関係するのですか？

答．関係します．上に凸ということは，接線がグラフの上側にある，ということです．実際，グラフ $y=f(x)$ の点 (a,b) での接線 $y=f'(a)(x-a)+b$ を考えて，$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ と $y=f(x)$ のどちらが上側にあるか，どちらが大きいかを見るために，$f'(a)(x-a)+f(a)-f(x)$ と引いてみます．この式を $F(x)=f'(a)(x-a)-f(x)$ とでもおくと，$F'(x)=\{f'(a)(x-a)-f(x)\}'=f'(a)-f'(x)$ であり，$F''(x)=-f''(x)$ と計算されます．もし，$f''(x)<0$ ならば $F''(x)>0$ で $F'(x)$ は増加，$F'(a)=f'(a)-f'(a)=0$ なので，$x<a$ で $F'(x)$ は負，$a<x$ で $F'(x)$ は正になります．つまり，$x<a$ で $F(x)$ は減少，$a<x$ で $F(x)$ は増加です．$F(a)=f'(a)(a-a)+f(a)-f(a)=0$ なので，$x<a$ で $F(x)$ は正，$a<x$ で $F(x)$ は正であることがわかります．結局 $F(x)\geqq 0$ になります．つまり，$f''(x)<0$ ならば，接線 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ がグラフ $y=f(x)$ の上にあります．これが上に凸の状態です．下に凸の場合は，同様の考察で，接線がグラフの下側にあることがわかります．

問．変曲点の必要条件は，$f''(c)=0$ (候補) となっていますが，候補とはなんでしょうか？

答．候補とは，たとえると，１次書類選考合格ということです．でも，２次の面接試験があり，実際に増減 (凹凸) 表を書いて，その前後で凹凸 (グラフの曲がり具合) が変わっていることを確認して，晴れて変曲点として合格，という感じです．

問．増減表で y'' と y' の符号が違うとき，どうして y' の符号が適用されるのですか？

答．増減には y' の符号が関係するからです．y'' の符号は，増減ではなく，凹凸を判定するのに使います．

問．３次関数の場合にも変曲点は存在します．しかし，一般に３次関数のグラフを書く場合，１回微分して導関数を求めはしますが，２回微分の値は求めません．

答．求めます．通常は (求めるのが簡単なので) 省略しているだけのことです．３次曲線には，確かに１つの変曲点が出ます．それを実際に自分で確認しようと思ったとき，２回微分して確かめられる，ということです．

問．高校では，極小と極大の中間が変曲点と教わったので，１箇所に定まる気がするのですが...

答．「極小と極大の中間が変曲点」というのは，残念ながら正しくありません．たぶん勘違いだと思います．(もし，本当にそう教わったとしたら，高校の数学教育の行く末が少し不安になります...) それはともかく，極大と極小を取る点の間の少なくともどこか１箇所に変曲点が現れる，というのは正しいのですが，途中に複数の変曲点が生じることも実際あります．たとえば，教科書の問にある，$y=3x^5-5x^3-1$ は，極大と極小の間に３つの変曲点があります．

問．$y=2x^2\sqrt{x}-5x^2$ の導関数の計算方法が全くわかりません．

答．全くわからない，ということはありえないと思います．とにかく，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ を使って，普通に計算すれば大丈夫です．

問．$\{(1-x)^{-1}\}'=(-1)(1-x)^{-2}$ となるのではないのですか？

答．いえ，合成関数の微分法則を使って，$\{(1-x)^{-1}\}'=(-1)(1-x)^{-2}(1-x)'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)$ です．

問．p.51 例２で，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$ となっていますが,「$x\to 1$」とすべきではないでしょうか？

答．いえ，三角関数の微分のところで紹介したように，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ なので $x\to 0$ のままで大丈夫です．

問．例題で，$y=2x^2\sqrt{x}-5x^2$ について，$y'=5x(\sqrt{x}-2)$ で，$x=0,4$ の時，極値を持つと思うのですが.

答．$\sqrt{x}$ が微分可能な範囲，つまり，$x>0$ で考えているので，$x=0$ は除外されました．

問．「べき級数」の「べき」とは何ですか？

答．x とか x^2 とか x^3 とは x^4 などのことです．(同じものを何回か書けたもの).

問．だんだんわからなくなってきました．// まったく微積がわかりません (泣)．// 勉強のしかたがわかりません．

答．だんだんわからなくなってきたということは，いままではだいぶわかった，ということですね．自信を持ってください．まったく微分積分がわからない，と言いますが，まだ積分はやっていないのでわからなくて当然ですね．とりあえず微分がわかればよいわけで，時間はたっぷりあります．泣いてばかりいないで，笑って楽しく計算して微分に慣れてください．数学の勉強のしかたは，以前も書きましたが，**とりあえず問題を解こうとしてください**．教科書をはじめから読んだりしていたら時間の無駄です．とりあえず問題を解こうとしてください．でも，いくら皆さんが優秀でも，初めから問題が解けるというわけにはいかないので，あれこれ考えて，講義ノートやら教科書をめくって，関係のありそうな箇所を見つけてください．それでまた，その同じ問題と解こうと試みてください．まだ，解けないときは，また，講義ノートや教科書をめくって，いろいろな公式や定理を適用してみてください．**試行錯誤が肝心**です．そのうち解けます．次の問題は，半分の時間で解けるようになります．その次の問題は４分の１の時間で解けます．その次の問題は，８分の１の時間で解けます．その次の問題は，１６分の１の時間で解けます．ところで，最初の問題を解くのに１０日かかりました．さて問題ですが，全部の問題を解くのに何日ぐらいかかるでしょうか？これは無限級数の問題ですね... (答えは２０日弱)．ではまた逢うときまで，ごきげんようさようなら．