微分積分学１ (１年５，１３，１４組) 質問に対する回答

No. 3 (２００４年5月２４日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるため，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． テキスト p.38 のところで，$f(x) = (1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n$ を k 回微分した時，$f^{(k)}(0) = k!a_k$ になるのはなぜですか？

答． こんにちは．微分の応用の理論的基礎をまっしぐら，といった今日この頃ですが，いかがお過ごしでしたか？では回答ですが，確かめてみましょう．$k = 1$ の場合は，$f'(x) = a_1 + a_2(2x) + a_3(3x^2) + a_4(4x^3) + \cdots + a_n(nx^{n-1}) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1}$ なので，$x = 0$ を入れると，$f'(0) = a_1$ となり，成り立っています．(ここで，$a_0, a_1, a_2, \dots$ は定数であることに注意)．$k = 2$ の場合，$f''(x) = 2a_2 + 3a_3(2x) + 4a_4(3x^2) + \cdots + na_n(n-1)x^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$ なので，$x = 0$ を入れると，$f''(0) = 2a_2 = 2!a_2$ で，成り立っています．$k = 3$ の場合は，$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$ となり，$x = 0$ を入れると，$f'''(0) = 3\cdot 2a_3 = 3!a_3$ となり，確かに成り立っています．一般の k でも同じように考えればわかります．確かめてみてください．ところで，ここで説明したことは,「**テイラー展開**」を考えるときの基本になります．

問． ロールの定理の証明で，$f(a) = f(b) = 0$ ならば必ず，関数 $f(x)$ のグラフは，極大値と極小値を持つ，ととらえてよいのでしょうか？

答．「$f(a) = f(b) = 0$ ならば $a < x < b$ の範囲で最大値または最小値をもつ」ととらえてください．

問． $\equiv$ と $=$ の違いについて教えてください．

答． 講義で説明したように，$\equiv$ は，関数が「恒等的に等しい」ことを表す強調表現の記号です．$=$ と書いても間違いではありません．

問． $f'(x) \equiv 0$ の $\equiv$ という記号は，昔，図形が合同の時にも使った気がするのですが，同じものですか？

答． 違うものです．同じ記号を違った意味に用いることもあるわけです．

問． テキスト p.46 の下から２行目で，$F(x) \equiv f(x) - \{m(x-a) + f(a)\}, (m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$ から，なぜ，$F(a) = F(b) = 0$ となるのですか？

答． 代入して確かめてみるとわかります．たとえば，$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a)$ を計算すれば 0 です．ところで，ここで使っている $\equiv$ は，関数の恒等式を表すというより，右辺の式で，左辺の関数 $F(x)$ を定義する，という意味で，著者は (不用意に) 使っています．こういう使い方をする人もいます．

問． $[a, b]$ と (a, b) の違いはなんですか？// (a, b) は何なのかがよくわかりません．

答． **閉区間と開区間の違い**です．$[a, b]$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲 (等号を含む) を表し，(a, b) は $a < x < b$ の範囲 (等号を含まず) を表しています．テキスト p.4 を参考にしてください．

問． (a, b) で $f'(x) \equiv 0$ とは，$f'(a) = 0, f'(b) = 0$ ということですか？

答． 違います．(a, b) は開区間の記号です．$f'(x) = 0 (a < x < b)$ という意味です．

問．「(a, b) において微分可能」というのは，$x = a$ から $x = b$ までの区間において微分できるという意味ですか？それとも，xy 平面における座標 (a, b) のことですか？

答． $x = a$ から $x = b$ までの区間において微分できるという意味です．ここでも，同じ記号をいろいろな意味に使っていますね．**状況を見て判断**しましょう．ところで，この質問を書いた質問書には名前が書いてありませんでした．こころ当たりのある人は申し出てください．

問． $f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続で，(a, b) で $f'(x) = g'(x)$ のとき,「$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと，$F(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能である」という説明がありましたが,「$f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続」という仮定からだけでは，その説明にはたどり着かないと思います．

答． なるほど．ただし,「(a, b) で $f'(x) = g'(x)$」という条件が付いています．この条件は，詳しく言えば「$a < x < b$ の範囲で，$f'(x)$ と $g'(x)$ が両方とも存在して，等しい」という意味です．だから,「$a < x < b$ の範囲で，$f(x)$ と $g(x)$ が両方とも微分できる」という条件をすでに含んでいます．そういう次第で,「$F(x) = f(x) - g(x)$ は (a, b) で微分可能である」という部分が導かれたわけです．

問． $(e^x)^{(4)} = e^x$ ですか？

答． そうです．$(e^x)' = e^x$ つまり，１回微分して形が変わらないので，２回微分しても変わらない，３回微分しても変わらない，４回微分しても変わらない，ということです．

問． ライプニッツの公式と２項定理が似ているということでしたが，何か数学的な関連はあるのですか？

答． あります．「**パスカルの三角形**」というものが背景にあります．教科書 p.42 の図を見て下さい．(名

前は書いていませんが，そこにある図形がパスカルの三角形と呼ばれるものです).

問．2項係数の計算の法則があるなら教えてください．

答．あります．$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = {}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ が計算法則 (というか定義) です．$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot 2\cdot 1$ は階乗の意味です．だから，$\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot 2\cdot 1}$ という具合に計算できます．たとえば，$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = {}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ となります．ところで，いろいろな記号を紹介しているのは，世の中で，いろいろな記号が使われているからです．

問．$y = x^\alpha$ の微分は，いちいち対数をとらないで，いっきに $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ としてよいのでしょうか？

答．一旦その公式が得られたら，もちろん，公式として堂々と使ってかまいません．ただし,「なぜ成り立つのか」と聞かれたら，対数をとって説明するわけです.「$y = x^n$ の微分が $y' = nx^{n-1}$ だから，それと同じことだ」と説明しても,「じゃ，どうして同じなのか」と聞かれたら，説明に窮しますね．だから，対数をとって説明するわけです．

問．$y = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$ を微分すると，$y' = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2$ になるようですが，どうして $-\frac{1}{2}$ 乗になるのかわかりません．

答．$\alpha = \frac{1}{2}$ としたときの，$\alpha - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ です．

問．$\log y$ を x で微分すると，なぜ $\frac{1}{y}y'$ なのですか？「☆で微分せよ」とあったときに，☆以外は定数として扱うのではないですか？

答．基本的にはそうですが，この場合の $\log y$ の y は，定数でなく，また x とは "独立" なものというわけでもなく，x についてのある関数 $y = y(x)$ を表している (たとえば，$y = e^x$) ということに気をつけましょう．したがって，$\log y$ を x で微分するときは，合成関数の微分公式が適用されます．

問．逆三角関数の微分がわからないです．$y = \sin^{-1} x$ から $\sin y = x$ となるのですか？

答．そうです．それがアークサインの定義だからです．そして，$\sin y = x$ の両辺を x で微分すれば，y' の公式が求められます．ただし，一旦，微分の公式 ($(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) が得られたら，それは非常に基本的な公式なので，(正確に理解して) 自由に使って構いません．

問．$\sin^{-1}\frac{x}{a}$ の微分の答えが $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ となるのはどうしてですか？$y = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ とおいた時，逆関数の公式から x と y を入れ換えると $x = \sin\frac{y}{a}$ となって，両辺を微分しても答えが合いません．恐らく"考え方" が間違っているところがあると思うので教えてください．

答．「x と y を入れ換える」という部分が正確でないので答えが合いません．逆関数の意味は，正確には「**x (入力) と y (出力) の立場を入れ換える**」ということです．つまり，x に該当するものと y に該当するものを入れ換えます．(見た目の記号に惑わされてはいけません)．さて，$y = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ については，$\sin^{-1}$ に入力されているものは，$\frac{x}{a}$ ですから，書き換えると，$\sin y = \frac{x}{a}$ となります．考え方としては，$\square = \sin^{-1}\bigcirc \Leftrightarrow \sin\square = \bigcirc$というのが良いです．(○を丸ごと考える)．両辺から sin を "かける" と考えてもよいです．ともかく，ここの部分を正しく考えれば，答えが合ってくると思います．

問．$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ から $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ に変形する時に，左辺と右辺には $\frac{\cos x}{\sin x}$ をかけているようですが，中辺は $\frac{\cos x}{\sin x}$ をかけても $\frac{\sin x}{x}$ になりません．なぜでしょうか？

答．$\frac{\cos x}{\sin x}$ をかけていません．講義で説明したように，$\sin x < x$ という不等式と $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ という不等式の**2つの不等式に分けて，別々に変形**していけばよいのです．

問．$F(x) = f(x) - g(x)$ とおく，という発想が出て来ませんでした，証明は昔から苦手分野でしたが，今回の場合は解法を暗記すべきなのでしょうか？// どうしたら始めから辿りつけるのでしょうか？// **証明問題**は何をヒントに解くべきでしょうか？なにかコツを教えてください．

答．証明を考えるということは，迷路を歩くようなものです．迷路があったとき，始めから出口への道筋がわかる，ということは**あり得ない**ので，少しの試行錯誤は必要です．それが迷路の楽しみであるわけです．(出口が見つからなかったら，入口に戻ればよい)．ただし，どうしても早く出口に辿り着きたい，という場合は，どうすればよいか？**迷路を早く抜け出すこつは，誰かに肩車してもらうことです**．つまり，教科書や講義の説明をよく読んでいろいろ質問すればよいわけです．(ただし，テストでカンニングしてよい，という意味ではありません)．ともかく，高いところから見てみると，進むべき道がすぐに見つかるというものです．そのとき，正解を暗記するというよりも,「ああそうか！」「そうなんだ！」と素直に思えばよい，といった軽い感覚で大丈夫です．はじめはチンプンカンプンだった迷路も，そうやって何度も通っていれば，無意識に道を覚えてしまって，迷路が，ただの「通い慣れた道」になるわけです．**いくら頭が良くても，初めてやることはうまく行かないのが道理**ですね．数学は,「慣れる」ということが大切です．ということで，よろしくお願いします．ではまた．