微分積分学１ (１年５，１３，１４組) 質問に対する回答

No. 2 (２００４年5月１０日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるため，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． なぜ $y = (2x-5)^{100}$ を微分すると $y' = 100(2x-5)^{99}(2x-5)'$ となるのですか？

答． こんにちは．さて，回答ですが，講義で説明した**合成関数の微分の公式**を使っています．$u = 2x-5$ とおくと，$y = u^{100}$ の x での微分は，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 100u^{99}u' = 100(2x-5)^{99}(2x-5)'$ となるわけです．y' は，x が微小変化したとき y の変化する割合，という意味がありますが，$2x-5$ 自体が $(2x-5)' = 2$ 倍の割合で変化するので，それも考慮しなければ正しい答えにはなりません．

問． $(\sin 2x)' = \cos 2x(2x)'$ となるのはなぜですか？

答． 前の質問の回答と同様で，$u = 2x$ とおけば，$(\sin 2x)' = \dfrac{d(\sin 2x)}{dx} = \dfrac{d(\sin u)}{du}\dfrac{du}{dx} = (\cos u)u' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x$ となるわけです．

問． $\sin 2x$ のような３角関数の場合，$2\sin x\cos x$ と変形できると思うのですが，微分をする際に，まず変形してから微分をせずに，合成関数として微分を行うべきなのでしょうか？

答． なるほど．でも，どちらでもよいです．どう計算しても (見かけは違っても) 答えが同じになるからです．つまり，$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\cos x)\cos x + 2\sin x(-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos(2x)$ となり，合成関数として微分したものと同じ結果になります．(違った答えが出るわけはないですね)．

問． $\sin^2 x$ の微分はどのようにするのですか？

答． $\sin^2 x = (\sin x)^2$ なので，$u = \sin x$ とおくと，$\sin^2 x = u^2$ ですから，$(\sin^2 x)' = \dfrac{d(u^2)}{dx} = \dfrac{d(u^2)}{du}\dfrac{du}{dx} = 2u\cos x = 2\sin x\cos x$ となります．

問． $(e^x)' = e^x$ になるのに，微分の意味はあるのですか？

答． 微分しても形が変わらないという性質があるから，関数 e^x が重要なのです．$(e^x)' = e^x$ が成り立つということは，微分方程式 $y' = y$ の解である，ということで，指数関数を使って解が表現できるということが意味のあるところです．

問． $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ の説明の流れがわかりません．// 自然対数の底 e は何のために定義されたのですか？

答． 教科書 (p.25) に標準的な説明があるので，ここでは，逆の流れの説明をしてみます．つまり，**微分しても形が変わらないような指数関数 a^x を求める問題から出発して，なぜ $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ という定義をしたか，という理由を導きましょう**．さて，$(a^x)' = a^x$ が成り立ったとします．ここで，a は正の定数 ($a \neq 1$) で，今から確定したい数です．$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ なので，$\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = 1$ ということが，定数 a の満たすべき条件になります．$h\to 0$ のとき，$a^h - 1 \to 0$ です．$k = a^h - 1$ とおくと，$a^h = 1+k$，つまり，$h = \log_a(1+k)$ です．だから，条件は $\lim_{k\to 0}\dfrac{k}{\log_a(1+k)} = 1$，つまり，$\lim_{k\to 0}\dfrac{\log_a(1+k)}{k} = 1$，つまり，$\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} = 1$，つまり，$\log_a(\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}) = 1$ が成り立つことです．だから，$a = \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ が条件です．$\lim_{k\to +0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は ($x = \frac{1}{k}$ とおくと) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ に等しく，この極限値は (存在するとすれば) 数列の極限値 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ に等しくなります．これがまさに e の定義の所以 (ゆえん) です．

問． $e = 2.71828\cdots$ というのは，どうやって求めたのですか？また，e は π と同じように，現在コンピュータで計算中なのですか？

答． いろいろ求め方があります．定義 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ からも近似値が出ますし，$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdot$ という等式からも近似値が求められます．(この式は，教科書 p.63 にあります．$x = 1$)．その他にもいろいろ計算方法があります．現在もコンピュータで計算中かどうかは知りません．ただし，実用的には十分な近似値はすでにわかっているので，あとは，趣味的な計算，あるいは，コンピュータ (プログラム) の質の確認・宣伝のための計算，になります．

問． $(uv)' = u'v + uv'$ の説明で，$\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$ の極限値は，$u'v + uv'$ となっていますが，$\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$ はどこへ行ったのですか？

答． $\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$ の極限値が 0 なので書いていません．

問． $\dfrac{u}{v}\cdot v = u$ の両辺を微分すると，$(\dfrac{u}{v})'\cdot v + (\dfrac{u}{v})\cdot v' = u'$ となる，ということがよく分かりませんでした．

答． 積の微分公式です．$w = \dfrac{u}{v}$ とおくと，$wv = u$ なので，$(wv)' = u'$，$w'v + wv' = u'$ となります．

問． $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2)} = \dfrac{2}{\cos^2 x}$ となりますか？

答． なりません．$\cos^2(x^2) = (\cos(x^2))^2$ は，x^2 のコサインの２乗という意味です．

問．「べき」とはどういう意味ですか？

答．x^2 や x^3 など x^n の形の式を"べき"(冪) と言います．覚えておくべきです．

問．極限値計算で，不定形が生じるときの決まった対処の仕方があれば紹介してください．

答．不定形の極限値を求めなければならない，というのは，めったにない，極限的で危機的な状況です．その場合は，要するに，本に書いてある先輩 (先達) の知恵を素直に聞いて，気を付けて扱う，というしかないですね．

問．$\frac{\sin x}{x} < 1$ なのに，どうして，$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} \leqq 1$ と，不等式に $=$ をつけることができるのでしょうか？

答．極限値を考えているからです．たとえば，$x \neq 0$ のとき，つねに $-x^2 < 0$ で，等号は成立しませんが，極限値をとれば，$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ という具合に等号が成立しますね．**極限値はわかりづらいですが，これがわかれば，微分はすべてわかったことになります．なぜなら「微分は極限値である」からです**．

問．逆関数の微分のところが本当にわかりませんでした．

答．微分は，たとえると，こちらが変化したときに相手がどう変化する割合を考えているだけなので，こちらを 1 としたときの割合と，相手を 1 としたときの割合は，互いに逆数になる，ということだけです．

問．「∞ に近づける」というのはどういうことなんでしょうか？

答．$x \to \infty$ とは，x をどんどん大きくしていくことです．数直線でいうと，正の方向へいくらでも動いていく，ということです．無限に延びた数直線を想像すると良いですね．

問．連続関数の連続とは，完全につながっていればよいだけでなく，なめらかでなければいけないのですか？とがっていたらつながっていても連続とはいわないのですか？

答．違います．講義中に説明したように，「連続」とは，グラフがつながっていること，「微分できる」とは，グラフがなめらかであること，です．混同しないようにしましょう．

問．$\lim_{x\to\infty}\sin x, \lim_{x\to+0}\sin\frac{1}{x}, \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ の極限値が存在するかどうかの問題で，細かい部分 (思考する順序など) がわかりません．くわしい解説をして下さい．

答．くわしい解説をします．極限値の有無を問う問題なので，まず，関数のグラフのおおよその状況をとりあえず調べてから，次に結論を予想し，最後にその根拠を示す，という順で考えていけばよいです．最初の 2 つの極限値が存在しないことは，関数 $\sin x$ や $\sin\frac{1}{x}$ の挙動を見て判定できます．つまり，x が大きくなるなり方 (あるいは，0 に近づく近づき方) によって近付くような異なる値が少なくとも 2 つある，ということを示します．最後の問題は，$x\sin\frac{1}{x}$ の絶対値が x の絶対値を超えないことから，x が 0 に近付くときに，$x\sin\frac{1}{x}$ も 0 に近付くことがわかります．(はさみうちの手法)．ところで，一番大切なのが「思考する順序」であって，決して細かい部分とは言えません．

問．$\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ という記号はいったい何ですか？

答．x の符号です．$+1$ か -1 です．めったに使わない記号なので，無視しても大丈夫です．

問．$\frac{x^2}{x}$ のグラフとはどんなものですか？

答．$x = 0$ のときは，定義されていないので，直線 $y = x$ から原点をとり除いた図形がグラフです．

問．$g \circ f(x) = g(f(x))$ の $\circ$ は何ですか？

答．合成関数を表す専門の記号です．普段は使わないので無視してください．

問．弧度法で表記した角度を sin 等に用いてもよいのですか？

答．むしろ，これからは弧度法だけを使います．たとえば，$\sin 60^\circ$ などとは書かずに，あくまで，$\sin\frac{\pi}{3}$ と書きます．

問．$(1+\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ になるのはなぜですか？

答．1 は定数なので，$(1+\frac{1}{x})' = 1' + (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ となります．

問．$\mathrm{cosec}, \sec, \cot$ の記号の存在意義を教えてください．

答．歴史的意義があります．また，皆さんが，他の本や論文を読んだときに戸惑わないように，という配慮・親切心から，教科書では記号を導入し説明をしています．使用頻度は少ないので，とりあえず無視しても大丈夫です．

問．大学の数学では，分数の分母にルートがあっても有理化する必要はないのですか？

答．ありません．要するに，何の目的ために計算しているのか，その目的・状況によります．有理化した方が自分が使いやすければ有理化すればよい，というだけの話です．**数学は行儀作法のお稽古ごとではない**ので，道を踏み外さない限り，行儀が悪くても，字が汚くても大丈夫です．

問．和・積の公式は暗記する必要がありますか？// 公式は丸暗記でよいのですか？

答．基本的公式なので，丸暗記 (鵜呑み) というより，**何度も使って，体で覚えてください**．

問．ひたすら教科書で勉強するほうがいいのでしょうか？

答．世界一わかりやすいという評判の教科書なので，この教科書で勉強するとよいと思います．既に言ってあると思いますが，教科書の問題 (特に，指定した「解いておくべき問題選」) を自力で解く，解けないときは，講義ノートを見る，教科書の解説を読む，なるべく丁寧な解答を自分で付けていく，という形で復習してください．

問．演習プリント以外は，演習 (教科書などの問題の演習) の時間はとらないのですか？

答．残念ながらとれないと思います．皆さんはもう大人なので，一を知れば十を知る，自主的に自分の理解度に応じて自習できる，と皆さんを信頼し期待しているわけです．では，これからも引き続きよろしく．