微分積分学１ (１年５，１３，１４組) 質問に対する回答

No. 1 (２００４年4月１９日の分)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるため，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． 高校の時からの疑問なのですが，微分の定義が今一つわかりません．

答． こんにちは．さて，回答ですが，定義式は $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$ です．a は固定点で，h が 0 の方へ動いていきます．すると，分子も 0 に近づき，分母も 0 に近づきます．あくまでその比率をまず計算してから，おもむろに $h \to 0$ とする，その極限値が $f'(a)$ です．微分は，x が微小変化 Δx したときの y の微小変化 Δy の**比率** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ **の極限値**です．微分は極限値です．まず，そのことをおさえておいてください．ちなみに f' は「エフ・ダッシュ」と読む人が多いようですが,「エフ・プライム」と読むのが正しいようです．ところで,「数学が苦手」という人がかなり多いようですが，数学では「思い込み」や「先入観」は理解を妨げてしまうので，**零から出発する気分で素直に考えてください**．すぐによくわかるようになります.「苦手」を「得意」に変えるには，少し時間が要りますが，苦手意識から脱却するのは簡単です．

問． $f(x) = x^2$ のとき，$f'(x) = 2x$ となるのですが，これは微分の定義式において，h を 0 に限りなく近付けるという意味であり，正確には $h = 0$ ではないということでしょうか？

答． その通りです．$h = 0$ ではなく，あくまで，$\lim_{h \to 0} h$ が 0 です．単純に区別しましょう．

問． 「接線の方程式が $y - b = f'(a)(x - a)$」とはどういうことでしょうか？

答． 曲線 $y = f(x)$ の点 (a, b) (ただし $b = f(a)$) を通るような直線は無数にあります (方程式 $y - b = m(x - a)$ または 方程式 $x = a$ で表されます)．そのうちで，曲線に接している直線が $y - b = f'(a)(x - a)$ という方程式で表されるという意味です．曲線に接しているかどうかは，直線の傾き m (つまり，x の係数) で決まるのですが，その傾きが $f'(a)$ である，ということです．そこで，$f'(a)$ を**微分係数**と呼びます．

問． 勾配 (こうばい) と接線の違いは何ですか？// 勾配とは何の傾きですか？

答． 点 $(a, f(a))$ と点 $(a + h, f(a + h))$ を結ぶ直線の傾きです．つまり，$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$ です．(「勾配」と「傾き」は同義語です)．さて，点 $(a, f(a))$ と点 $(a + h, f(a + h))$ を結ぶ直線の傾きは，接線の傾きの近似値です．h を 0 に近付けたときの極限値が接線の傾きそのものです．

問． 極限値を求める時，どうして，$x \neq a$ でなければならないのでしょうか？

答． 極限を考えるときに必要なのは，x が a に近付く，ということだけで，$x = a$ のときに，式に意味がなくてもかまわない，という意味です．たとえば，$\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ という極限値を考える場合，当然 $x \neq 0$ としています．

問． $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ のとき，$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a$ となる意味がわかりません．$x \neq a$ と定義してるのに，$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a$ となることが納得できません．$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき，限りなく 0 に近づきますが，決して 0 にならないのと同じように，$x + a = 2a$ となることはないのではないでしょうか？

答． そうです．$x \neq a$ なので $x + a \neq 2a$ です．$x + a = 2a$ ということは誰も言っていなくて，言っているのは，単に $\lim_{x \to a}(x + a) = 2a$ です．極限値を求めているだけです．講義中に説明したとおり,「$\lim_{x \to a} f(x)$」 はワンセットの記号です．ただの $f(x)$ とは別物です．lim が付くと “変身” するわけです．lim という印の付いているものと，付いていないものを区別してください．

問． $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2(x^2 - 1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{2(x + 1)}$ ですが，どうして，左辺と右辺がイコール関係なのか教えて下さい．// $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$ と書いてもよいのですか？ $=$ (イコール) ではなくて，$\fallingdotseq$(ニアリーイコール) の方が正しいのではないでしょうか？

答． 極限値 (limit) が等しいからです．では，どうして極限値が等しいかというと，$x \neq 1$ のとき，$\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2(x^2 - 1)} = \dfrac{x - 2}{2(x + 1)}$ だからです．それから，$\dfrac{x - 2}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$ と書くと間違いですが，lim を付けているので，極限値の意味で正しいわけです．ちなみに，数学では，$\fallingdotseq$(ニアリーイコール) という記号は使いません．意味がはっきりしていない (誤差の範囲が特定されていない) ので使いません．

問． $\lim_{x \to \infty}(x^3 - 243x^2 + 27x - 729) = \lim_{x \to \infty} x^3(1 - \frac{243}{x} + \frac{27}{x^2} - \frac{729}{x^3})$ はわかるのですが，それがなぜ ∞ になるのかわかりません．

答． まず，講義で説明したように，∞ は数ではなくて，関数の状態を表す記号です．したがって，$\lim_{x \to \infty} x^3(1 - \frac{243}{x} + \frac{27}{x^2} - \frac{729}{x^3}) = \infty$ という主張は，あくまで，$x^3(1 - \frac{243}{x} + \frac{27}{x^2} - \frac{729}{x^3})$ という式が，x を大きくしていったときに，どんどん際限なく大きくなる，ということを意味しています．そうすると，x^3 はどんどん大きくなり，一方，$1 - \frac{243}{x} + \frac{27}{x^2} - \frac{729}{x^3}$ の部分は，1 に近付いてくるので，両者を掛けたものは，どんどん大きくなります．その意味で，∞ で表すわけです．

問． $\lim_{x \to a} f(x)$ は数字であり，∞ は記号であって数字ではないのに，$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ がイコールになっていいのですか？イコールマーク $(=)$ は完全なイコールを表すものではないのですか？

答． なるほど，もっともな疑問です．これは慣用的な書き方なので，講義でも説明したように,「$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ 」という式をワンセットで (「$\lim_{x \to a} f(x)$」「$=$」「∞ 」と分解しないで) そのまま $f(x)$ の状態を表す記号，であると理解するとよいと思います．

問． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+x+7}$ では何を求めるのですか？

答． 分子・分母がともに ∞ に発散してしまって，そのままではわからないので，分子・分母を両方 x^2 で割ってから極限値を求めます．

問． $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$ の極限値を求める問題は，因数分解ができるわけでもなく，分子・分母に同じものをかけてつじつまを合わせをしていくパターンでもないようですが，どうしたら良いのでしょうか？

答． 答えを予想して評価します．$x\to0,\ -1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$ なので，掛けたものの極限値は 0 だろうと予想できます．あとは，$0\leq|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\to0(x\to0)$ と評価して絞り込みます．

問． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$ のグラフが $+\infty$ に発散するというのは，どういう意味なのでしょうか？聞き間違いですか？// $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$ が発散で極限値が存在しないという意味がよくわかりません．// 発散ではなく，振動にならないのはなぜでしょうか？

答． 聞き間違いです．単純に「発散」です．あるいは「極限値が存在しない」と言っても同じです．どんな値に対しても，それにどんどん近付いていく，ということはないからです．-1 と 1 の間を振動します．ですから，“振動”と答えても間違いではありません．ただし，“振動”の意味がはっきりしていないので,「収束」の反対語として「発散」という表現を使いました．

問． $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ について，どうして，$f(x)$ に a を直接代入してはいけないのですか？

答． $f(x)$ が $x=a$ で定義されているかどうかわからないからです．定義されていても連続関数かどうかわからないからです．たとえば，$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ に $x=0$ を直接代入できませんね．

問． 「連続」という言葉にイメージがわかないのですが，どう考えればいいのですか？連続関数とは普通の関数のことなのでしょうか？

答． ”関数が連続”というのは,「関数のグラフがつながっている」「関数のグラフが切れていない」というイメージです．多くの場合に連続関数を扱う，ということはできると思います．でも，不連続な関数も多くあります．

問． 連続関数の定義がどうして $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ なのかわかりません．

答． こう定義するとうまくいくからです．極限値の記号を使うと，連続関数のイメージを式で上手に厳密に表現することができるからです．

問． 教科書に条件 (i) $\sim$ (iii) までの３つの条件をみたすものが連続関数と書いてありますが，条件が１つでも欠けてしまったら連続関数ではないのでしょうか？

答． まったくその通りです．

問． 連続である条件の１つとして,「$x=a$ は $f(x)$ の定義域に属している」とテキストにありますが，それはどう確認すればよいのでしょうか？

答． なるほど．普段は，あまり意識していないかも知れませんが，実は，**関数の定義域は，決まるものではなくて，決めるものです**．ですから，関数を定義する際には，必ず定義域も定める必要があります．その定めている定義域に属している，という意味です．

問． 単調な部分で y の値をとる x は１つ，ということはどういうことですか？// x の値が存在しない (0 個) ということはありますか？

答． 関数 $y=f(x)$ が単調増加，あるいは単調減少な範囲に限れば，$y=y_0$ を固定するごとに，$y_0=f(x)$ となる x は 1 個か，0 個だ，ということです．0 個ということもあります．たとえば，$y=\sin x$ が単調な範囲 $0^\circ\leq x180^\circ$ で，$y_0=2$ とすると，$2=\sin x$ となる x はありません．ちなみに，$-1\leq y_0\leq1$ の範囲なら，$y_0=\sin x$ となる x はただ１つです．

問． $x=f^{-1}(y)$ をなぜ $y=f^{-1}(x)$ に入れ替えられるのですか？// 「通常は，x と y を入れかえる」とはどういうことですか？

答． たとえば，関数 $y=x^2$ を単調増加な範囲 $x\geq0$ で考えてみましょう．すると，$x=\sqrt{y}$ と表されます．これが逆関数です．関数としては，式の意味だけが問題になります．変数がどの記号で書かれているかは，二義的なことです．それで慣習に従い，変数を x におきかえ，$y=\sqrt{x}$ と書き直しているだけです．それだけのことです．

問． 逆関数は１次関数にもあるのですか？// 逆関数はどんなところで役立つのでしょうか？

答． あります．$y=ax,(a\neq0)$ の逆関数は，$y=\frac{1}{a}x$ です．指数関数や３角関数の逆関数を考えると，もっと役に立ちます．

問． 直線はどんなに細くかいても必ず面積をもつが，それはどう認識すればよいのか分かりません．数直線を視覚的に認識する方法はあるのでしょうか？

答． 「直線を正確に描く」というのは不可能です.「直線」というものは抽象的な存在であり，目には見えません．想像してください．

問． 数学に関する解答について，答えさえあっていれば，数学は「ほぼマル」だと言われていたのですが，やはり，これからも，この考え方を続けていってよいのでしょうか？

答． 細かな部分は，気にしなくても大丈夫です．ただし，**解答の途中の大筋は答えと同様に大切です**．

問． 微分は経済でよく使うと言われているのですが，使い道が分かりません．どれを，どう，いつ使えばいいのですか？

答． とくに”数理経済学”では，いろいろな数学を，自由に，いつも使うと聞いています．

問． テスト前，時間がないときに,「演習問題」と「解いておくべき問題」のどちらをやればよりその単元を理解できますか？

答． 今なら，たっぷり時間があります．両方解いて，十分に理解しておいてください．

問． 内容理解に役立つ参考書などはありませんか？数 II B の範囲の復習は必要ですか？

答． 高校時代の教科書はよい参考になると思います．必要だと思った時点で，復習するとよいと思います．ではまた．