微分積分学Ⅰ　補足プリント

２００６年前期　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

(1) e **の無限級数表示：** 数列 $t_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ と有限級数 $s_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ に対し，

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

が成り立つ．

(1) の証明：
まず，

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n$$

が成り立つ．また，$n \geqq m$ について，

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \geqq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

が成り立つ．m を一旦固定しておいて，$n\to\infty$ とすると，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = e$ なので，$e \geqq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m \geqq t_m$ がわかる．$\lim\limits_{m\to\infty} t_m = e$ なので，はさみうちの定理から，$e = \lim\limits_{m\to\infty} s_m = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ が示される．

(2) e **の近似値の誤差の評価：** $0 < e - s_n < \dfrac{1}{n!n}$ が成り立つ．

(2) の証明：
(1) から，

$$0 < e - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}$$

(3) e **の無理性：** e は無理数である．(有限小数でも循環小数でも表されない)．

(3) の証明：
e が有理数と仮定して矛盾を導く．$e = \frac{p}{q}$(p, q は正の整数）とおく．その q に関して，(2) から，$0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}$ が成り立つから，$0 < q!e - q!s_q < \frac{1}{q}$ が成り立つ．仮定から $q!e$ は整数のはずであり，また，$q!s_q = q!\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{q} q(q-1)\cdots(q-k+1)$ も整数なので，差 $q!e - q!s_q$ も整数のはず．それが，0 と $\frac{1}{q}$ の間にはあり得ない．これは矛盾である．この矛盾は e が有理数であると仮定したために生じたので，背理法により，e が有理数ではないこと，つまり，無理数であることが示された．

おしまい．