微分積分学 I　質問に対する回答

No. 2　(２００６年6月２６日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．以前の回答書ですでに回答済のものは繰り返していません．**回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください**．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．なお，回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

７月１０日の期末テストの試験範囲は，中間テストの範囲以降です．具体的に，
教科書 p.43 **から (テイラーの定理から)，７月３日の講義で進んだところまで**，です．注意してください．

問． 偏微分は実際にどのような事に応用されるのでしょうか？

答． 講義で説明しますが，多変数関数の微視的な変化を解析したり，極値問題を解いたり，自然現象を表す偏微分方程式に使われたりします．たとえば，$z = f(x, y)$ に関するラプラスの方程式は $z_{xx} + z_{yy} = 0$ という偏微分方程式です．

問． $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$ を約分して，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ としてはいけないのはなぜですか？

答． $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は分数ではないからです．１変数の場合は，$\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt}$ が成り立ちますが，これは，約分したからそうなったのではありません．そう見えたのは単なる偶然です．実際，多変数の場合は成り立ちません．別の記号で，$z_x x_u$ と書けば，誤解はなくなりますね．２変数の場合成り立つのは，$z_x x_u + z_y y_u = z_u$ という公式です．(x, y が両方関係してくる)．

問． $z = f(x, y)$ の全微分が $df(a, b) = f_x(a, b)dx(a, b) + f_y(a, b)dy(a, b)$ で表される原理がわかりません．

答． x, y が独立に変化するとき，f がどう変化するかを表す式なので，x-偏微分も y-偏微分も共に関係してくる，ということです．今，(a, b) から $(a + h, b + k)$ の方向に $(a + th, b + tk)$ と進んでいくことを考えると，$f(a + th, b + tk)$ の t-微分は，$\frac{d}{dt}f(a + th, b + tk) = f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k$ という形になります．x 方向には，h に f_x をかけた比率で，y 方向には，k に f_y をかけた比率で，トータルに，それを足した分だけ変化するということです．t で微分した後で，$t = 0$ とおけば，$\dfrac{df}{dt} = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$ という式になります．これが全微分のココロです．

問． そもそも (h, k) とは何ですか？なぜ，$h = dx, k = dy$ なのですか？

答． (h, k) は (x, y) が変化する方向を表すベクトルです．h は，x という式の全微分と見なされるので，dx と書けます．y-方向には変化しないという部分です．同様に $k = dy$ と表されます．

問． $f(a + h, b + k) - f(a, b) = \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ という式の $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ が必要な理由がわからないです．

答． $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ を省いてしまうと，「$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \alpha h + \beta k$」 となり，$x = a + h, y = b + k$ と書き換えると，この式は「$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)$」となり，$f$ が１次関数になるということになります．f が１次関数でなければ，成り立ちません．$o(\sqrt{h^2 + k^2})$ を省いた式は，f そのものではなく，接平面の方程式の方を表した式になります．

問． 教科書にある「$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ があれば $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y))$ も存在するが，逆は一般に成り立たない」という意味がわかりません．

答． $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y))$ は，まず，$(x, y) \to (a, y)$ としてから，$(a, y) \to (a, b)$ と近づくときの極限値という意味なので，近づき方が限られている，ということです．$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ は，どんな近づき方をして $f(x, y)$ が近づく極限値なので，存在条件が厳しいわけです．

問． ３変数関数はグラフにできないのですか？

答． 式では書けます．$w = f(x, y, z)$ が，$xyzw$-４次元空間における，グラフの方程式です．ただし，図示するのは困難になります. (いろいろ工夫すると表現ができますが，残念ながら，人間の認知能力の限界があります)．

問． ３変数関数 $w = f(x, y, z)$ に関する式 $w - f(a, b, c) = f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$ の図形的な意味は何ですか？

答． f のグラフの点 $(a, b, c, f(a, b, c))$ における「接空間」の方程式です．接線，接平面の次なので接空間と呼びます．

問． 接平面の方程式には，接線の方程式が持つような特徴を持っていますか？また，１変数の２次関数，３次関数，といったものには，次数によって，ある程度接線の本数が決まってきますが，２変数の関数の接平面には，それぞれの変数の次数によって接平面の個数が決まってくるのでしょうか？

答． xyz-空間のグラフ $z = f(x, y)$ にたいし, (グラフ上にない) １点 (a, b, c) を通り，グラフに接する平面がいくつあるか，という問題ですね．ある程度決まってきます．おもしろい問題なので，昔から調べられています．詳しい理論がありますが，やや高度な数学（代数幾何とよばれる分野）を使うので，ここでは詳しく説明できないのが残念です．

問． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ は不定形ですか？

答． 不定形です．$\frac{0}{0}$ の形をしているからです．ただし，この極限値は，三角関数の微分を考えるときの基本なので，微分の応用であるロピタルの定理から求める，ということ以前に，良く知られた極限値であるという認識でよいと思います．

問． 教科書の Taylor の定理の証明で，$F(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k - \frac{R_n}{(b - a)^n}(b - x)^n$ を微分すると，$F'(x) =$

$-\dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}+\dfrac{nR_n}{(b-a)^n}(b-x)^{n-1}$ となるのが理解できません．

答． $F'(x)=-\left(f(x)+f'(x)(b-x)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right)'-\left(\dfrac{R_n}{(b-a)^n}(b-x)^n\right)'$
$=-\left(f'(x)+f''(x)(b-x)-f'(x)+\cdots+\dfrac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\dfrac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+\dfrac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right.$
$\left.-\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{n!}(b-x)^{n-2}\right)+\dfrac{nR_n}{(b-a)^n}(b-x)^{n-1}=-\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right)+\dfrac{nR_n}{(b-a)^n}(b-x)^{n-1}$ となります．

問． $\sin x$ や $\log(1+x)$ などをマクローリン展開を使って近似できることはわかりましたが，普通はどのくらいまでくり返せばいいのでしょうか？

答． 目的によります．だから，一般の場合を知っておけば万能なわけです．

問．「無限小」の意味がわかりません．

答． ある極限の状態で，0 に近づく量のことです．極限という操作を伴っているので，ある程度高級な概念です．

問． $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),(x\to 0)$ の $o(x^3)$ はどういう意味ですか？

答． x^3 で割って $x\to 0$ としたとき 0 に近づくほど小さい量である，ということです．

問． 教科書の「$f(x)=h(x)+o(g(x))$ は，$f(x)-h(x)=o(g(x))$ のことである．$f(x)=o(1)$ は，単に $\lim_{x\to a}f(x)=0$ と同じである，ということはどういうことですか？$o(1)$ の 1 はどこから出てきたのですか？

答． 講義でも説明しましたが，$o(g(x))$ という書き方は，単なる「略記法」である，と理解してください．便利だから使っていると考えてください．$o(1)$ は，1 で割って（つまりそのままで）$x\to a$ としたとき，0 に近づくということです．$o(2)$ でも，$o(1.5)$ でも結局同じことですが，簡単のため $1=(x-a)^0$ を選ぶのが普通です．

問． テイラーの定理において，$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ の剰余項が $o((x-a)^n)$ と表されるのが分かりません．

答． $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n),(x\to a)$ だからです．つまり，$\dfrac{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n}$ $\to 0,(x\to a)$ だからです．(ここで，$f^{(n)}(x)$ の連続性を仮定)．

問． 高階偏微分の順番を変えても，なぜ結果は変わらないのですか？

答． 補足 (§3.7, p.87) に証明が書いてあるので，それを参考にしてください．ある種の極限値を（平均値の定理を使って）f_{xy} と f_{yx} を用いて２通りに表すという証明です．

問．「或る領域において，f_x,f_y,f_{xy} が存在し，領域内の一点において f_{xy} が連続ならば，f_{yx} も存在し，$f_{xy}=f_{yx}$」という Schwarz の定理と,「或る領域において，f_x,f_y が存在し，それらが領域内の一点において全微分可能ならば，$f_{xy}=f_{yx}$」という Young の定理は，仮定するものが違うのに，どうして同じ事が言え，どのように使い分ければよいのですか？

答．「解析概論」に紹介されている定理ですね．仮定が違っても結論が同じ，ということは沢山あります．そして，仮定が満たされていなかったら，その定理は使えず，仮定が満たされていたら，その定理が使えるということで，使い分けます．偏微分の順序を変えてもよいための十分条件には，他にもいろいろあります．講義や教科書では，Schwarz の定理が紹介されていますが，もっと使いやすくて重要な定理としては,「f が C^2 級ならば，$f_{xy}=f_{yx}$」というものがあります．C^2 級とは，すべての２階偏導関数が連続ということです．

問． 合成関数の微分法の公式について,「$x=f(t),y=g(x)$ とすると，t の変動 Δt に対応する x の変動を Δx，それに対応する y の変動を Δy とすれば，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\cdots(*)$ となるから，$\Delta t\to 0$ とすれば，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to\dfrac{dx}{dt}$ となり，このとき $\Delta x\to 0$ となるから，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to\dfrac{dy}{dx}$ となる．よって，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\to\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ となって，故に，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ となる」というのは，Δt の値によっては，$\Delta x=0$ となる場合があるので，この場合 (*) のように書けないので，全ての場合にはあてはまらないと思いますが，どなんでしょうか？この説明は，高校の教科書でも説明されていて高校時代に疑問に思っていました．

答． その通りです．講義で説明したのは，厳密な証明ではなく，おおよその説明でした．教科書 p.31 の証明は厳密な証明（であって，しかもコンパクトな証明）なので，参考にしてください．

問． 円周率 π の正確な求め方がわかりません．どのように π を求めているのですか？

答． いろいろな公式が知られています．主に無限級数の和として表します．古くはアルキメデスによる方法が有名です．半径１の円（周の長さが 2π 面積が π）を外接多角形で近似して近似値を求め，辺の数をどんどん増やしていって，精度を上げていくという方法です．アルキメデスは，私 (石川) の尊敬する数学者の一人です．

問． 分数の割り算をするときに，どうして分母と分子を反対にしてかけるのかがわかりません．高校生に説明するなら，$a\div\frac{c}{b}=a\times\frac{1}{\frac{c}{b}}$ というように書き直して説明できそうな気がするのですが，小学生に対して説明しろと言われると，よくわからなくなります．分数の割り算が表す意味を明確に示して，分母，分子を反対にしてかける理由を教えてください．

答． 私見ですが，小学生に分数の割り算を教えるのは時期尚早だと思います．整数の加減乗除をしっかり身につけることの方が先決だと思います．それはともかく，$\frac{b}{a}$ という数は,「a を掛けたら b になる数」なんだよ，と説明したらどうでしょうか？（これは，正攻法であって，要するに，一次方程式 $ax=b$ の解，ということです）．$\frac{1}{2}$ は 2 を掛けたら 1 になる数，$\frac{2}{3}$ は 3 を掛けたら 2 になる数．では，1 割る $\frac{1}{2}$ つまり，$\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ は？$\frac{1}{2}$ を掛けたら 1 になる数だから，そうだね，2 だね．という具合に説明してはどうでしょうか？(講義内容とは直接関係しませんが，数学（算数）をどう教えるか，ということも皆さんが数学を理解する上で参考になると思うので，回答しました)．では，試験もがんばってください．Try hard and feel easy！