

微分積分学 I 質問に対する回答

No. 1 (2006年5月1日の分) 担当 石川 剛郎 (いしかわ こうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します。なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが、回答しづらい質問には回答していないものもあります。回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは、直接質問してください。文体を(です、ます調に)統一するため、あるいは、質問の一部に答えるために、質問の文章を変えて掲載する場合があります。なお、回答書は、

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html> に掲載予定です。参考にしてください。

問. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ という定数の意味がわかりません。// どのような原理や論理で決まっています、どのような必要にせまられて発明されたかを教えてください。

答. 自然法則を述べるために、どうしても必要だったから、歴史的にだんだん意識されて、今日、明確に定義されているわけです。次のような説明はどうでしょう。自然法則の中で、指数関数 $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$) の重要性は疑いがないですね(等比級数の連続変数版。自然科学の教科書をひもとくと、どの本にも指数関数が使われている)。その中で、微分 y' が y そのものに等しいという特別であって他のものの基準となる場合を探します。 $y' = y$ となるということは、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x$ ですね。指数法則は成り立つから、条件は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となることです。いま、 $t = \frac{1}{a^h - 1}$ とおくと、 $h = \log_a(1 + \frac{1}{t})$ となり、 $\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{t \log_a(1 + \frac{1}{t})} = \frac{1}{\log_a(1 + \frac{1}{t})^t}$ なので、 $t \rightarrow +\infty$ のとき、その特別な数 a については、 $\log_a(1 + \frac{1}{t})^t \rightarrow 1$ とならなければいけません。つまり、極限值 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{t})^t$ があって、それが a になるはずですが、そのような a は、当然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ でなければいけない、ということになります。このように、基本的な数をつきつめて求めていくと、自然に e に到達するわけです(発見的方法)

問. なぜ、 e^x は微分しても積分しても e^x のままなのですか? e の定義からは、なぜ変わらないのか理解できません。

答. 直前の回答から、そのような性質をもつ指数関数の指数は e であることがわかりますね。厳密に言えば、定義式 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ (数列の極限值) から、 $e = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{t})^t$ (関数の極限值) を示さなければなりませんね。これは、教科書 p.19 例 11 で証明されています。

問. 自然対数の底 e が様々な自然現象を説明するのに有用なのは、偶然ですか人為的なことですか?

答. 偶然なのか必然なのかは何とも言えませんが、自然の中に隠れていたものを、われわれ人間が人類の英知を結集して、ついに見つけ出した、と考えると良いと思います。

問. $e = 2.718\cdots$ は、どうすれば証明されるのでしょうか? // どうやってこの数値を求めるのですか?

答. 定義からも近似値が求められますが、実は $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ というふうに、無限級数の和に表示され、この級数の収束はかなり速いので、たとえば $n = 0$ から $n = 6$ までとれば、 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2.718\cdots$ というふうに容易に近似値を求めることができます。

問. Napier の定数 e は、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ の2通りで表されるようですが、どうしてこの2つが等しくなるのかわかりません。簡単に証明できるものですか?

答. 簡単ではありませんが、微分を使って証明できます。教科書 p.45 を見てください(このプリントの最後に、直接的な証明を書いておいたので、それも参考にしてください)。

問. $e = 2.718281828459\cdots$ と無限に続くらしいですが、なぜ無限に続くとわかるのですか?

答. 簡単ではありませんが、証明できるからです。 e は無理数になること、したがって、有限小数でも循環小数でも表されない、ということが証明できます(この講義の本筋からはずれるのですが、このプリントの最後に、証明を書きました。参考にしてください)。

問. 数列の有界と収束の区別がよくわかりません。

答. 収束する数列は有界ですが、有界であっても収束するとは限りません。たとえば、 $a_n = (-1)^n$ は有界ですが、収束しません(極限值がない)。

問. 有界な単調数列は収束するはずなのに、 $a_n = (-1)^n$ が収束しないのはどうしてですか?

答. $a_n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ は単調ではないから、「有界な単調数列は収束する」ということにあてはまらないわけです。

問. 「はさみうちの原理」で使用する、はさむ2つの数列は、どうやってみつけるのですか?

答. 与えられている数列 c_n に対して、 $a_n \leq c_n \leq b_n$ が成り立って、 a_n の極限值と、 b_n の($n \rightarrow \infty$ のときの)極限值が同じでありさえすれば、どれでもよいです。

問. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ですが、これは、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = 1$ ではないですよね。

答．そうです． $\frac{0}{0}$ という式は（比喩として使いますが）数学では禁じられた式です．無意味な式です（たとえば， $2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \frac{0}{0} = 1$ といった変な式も得られます）．ですから証明の中では使用禁止です．

問． $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を言い換えて， x が十分に小さいとき， $\sin x = x$ として（物理的に考えて）問題の中で証明なしで使ってもよいのでしょうか？

答．ダメです．「 x が十分に小さいとき， $\sin x = x$ 」は間違いなので使わないでください．

問．そもそも無限小とは何ですか？// どのようなものを無限小というのですか？

答． x の式 $f(x)$ が $x \rightarrow a$ のとき「無限小」とは， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ のときにそう呼びます．

問． $f(x) = o(g(x))$, ($x \rightarrow a$) とはどのようなことですか？

答． $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ということです．授業では，主に， $x \rightarrow 0$ の場合を説明しました．

問．相対的に考えて，より 0 に近づくのが速い関数が，高次の無限小となる，ということでしょうか？

答．その通りです．

問． $o(x)$ などの「スモールオミクロン」は，どう書いたらよいのですか？

答．小文字のオーでよいです．

問．無限小を考える時，たとえば， $g(x) = o(x^k)$ だけでなく， $g(x) = o(x^k)(x \rightarrow 0)$ と書かなければ，式として認められないのでしょうか？

答．厳密に言えばそうです．ただし， x がどの値 a に近づくときの話をしているか明らかな場合は，省略することもあります．

問．無限小の比較において， $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$ の 2 つの比較をしないのですか？

答．しています． $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ という条件は，「 $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 」という条件のことです．

問．無限小が「0」ではなく，「 $-\infty$ 」のときもありますか？

答．ありません．「無限小」は「大きさが無限に小さくなる」ことです．ちなみに，「 $-\infty$ 」は「マイナス無限大」です．

問．無限小の次数がよくわかりません．「1 次である」というのは「2 次ではない」というのと違うのですか？

答． $x \rightarrow 0$ の場合の説明をします．このとき $f(x)$ が k 次の無限小であるとは，「極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k}$ が存在して，その極限值が 0 でない有限値のとき」に言います．たとえば， $\sin x$ は 1 次の無限小です．確かに，次数は 1 通りに定まります．ですから，1 次であれば，2 次ではないですね．

問．関数の連続性は何のためにあるのですか？

答．微分積分学を理解するために必要です．この講義でも，微分のところにもたびたび登場するし，積分のところにも登場します．さらに進んで，いろいろな分野，たとえばトポロジーや確率論といった分野で必要になる概念です．

問．関数の連続性についての質問ですが，連続な関数の $+$, $-$, \times , \div はすべて連続であると教科書にありますが（定理 1.6），これに例外はないのですか？また，どのように証明されるのですか？

答．教科書の定理 1.4 \Rightarrow 1.5 \Rightarrow 1.6 という論理的つながりで証明できます．

問．逆関数の意義はどのようなものですか？// 実際にどのような分野に用いられ，どれくらい使われているのかわかりません．

答．指数関数の逆関数が対数関数です．あらゆる分野に使われています．また，これから，三角関数の逆関数として，逆三角関数を定義して，それを使って，積分などを計算します．

問． $y = f(x)$ が増加関数のとき， $x = f^{-1}(y)$ も増加関数になるのはなぜですか？

答．定義からわかります．狭義単調増加「 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 」とすると，この条件については逆も成り立つ「 $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ 」ので，逆関数も増加関数になります．

問． $y = \sqrt[n]{x}$ のグラフは n の偶奇で場合分けが必要なのですか？

答．確かに， n の偶奇で「定義域の取り方を変える」という意味で場合分けすることがあります（ n が奇数なら，定義域を \mathbf{R} にとれる）．

問． α が一般の実数のとき， $\binom{\alpha}{k}$ を $\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$ と書くことができないのはなぜですか？

答．理由は，実数 α に対して，その階乗 $\alpha!$ に意味がないからです．でも， $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$ なら， α が自然数でなくても，一般の実数でも意味がありますね．

問・ $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$ がわかりません。

答・ $\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-(k+1)+1)}{(k+1)\cdots k\cdots(k-1)\cdots 1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)\cdots k\cdots(k-1)\cdots 1} = \frac{\alpha-k}{k+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$
 $= \frac{\alpha-k}{k+1} \binom{\alpha}{k}$ と $\binom{\alpha+1}{k+1} = \frac{(\alpha+1)((\alpha+1)-1)\cdots((\alpha+1)-(k+1)+1)}{(k+1)\cdots k\cdots(k-1)\cdots 1} = \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)\cdots k\cdots(k-1)\cdots 1}$
 $= \frac{\alpha+1}{k+1} \binom{\alpha}{k}$ からわかります。

問・最大値・最小値の定理において (最大値) = (最小値) となることは起こり得るのでしょうか？

答・質問の補足説明にあったように、定数関数の場合は、そうなります。それ以外は、最大値と最小値は、異なる値になります。

問・ $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ となるのがよくわかりません。

答・とび階乗 $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2 = 2 \cdot n \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^n \cdot n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdots 1 = 2^n \cdot n!$ という具合にして分かります。

問・演習プリント No.3 の 2 の解答を、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3e^{-x}) \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot 1 = 1$ としてはいけないのでしょうか？

答・すばらしいです。良い解答です。

問・ $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ とはどうしてならないのですか？

答・途中で、式の中の一部の n だけの極限をとっているから、残念ながら正しくありません。やはり、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ を使わないと正しく求まりません。

問・ $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ を、 $\frac{n}{3^n} = (\frac{1}{3})^n \times n \rightarrow 0 \times \infty = 0 (n \rightarrow \infty)$ としてよいのでしょうか？正式な証明方法を教えてください。

答・ ∞ は「数」ではないので、 $0 \times \infty$ といった式に意味がありません。 $\frac{0}{0}$ に意味がないのと同じことです。正式には、教科書 p.6 の例 2 を応用すれば、示すことができます。 $(a_n = \frac{n}{3^n}, |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1+\frac{1}{n}}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1)$

問・ロピタルの定理の証明はどうすれば良いのですか？

答・教科書 pp. 47-48 に証明があります。参考にしてください。

問・どうして角度とラジアンとの 2 つの表し方があるのですか？また、どうして一周が 360 °なのですか？

答・角度 (360 °) は、歴史的に定まったものですが、理論的には扱いつらいので、しばらく後にラジアンが考案されました。ちなみに、360 °は、2 でも 3 でも 4 でも 5 でも 6 でも割り切れるから選ばれたのだと思います。(1 ダースは 12 本)。

問・関数というものは、 x と y が 1 対 1 で定まらないといけないのですか？

答・1 対 1 でなくても良いです。 x を決めたとときに y が 1 つ決まればよいです (多対 1 でもよい)。ただし逆関数が考えられるのは、1 対 1 のときです。

問・フィボナッチ数列とヒマワリとは、どのような関係があるのか教えてください。

答・ヒマワリの種の配置が、フィボナッチ数列で表されるそうです。なぜそうなっているかという理由は、ヒマワリに聞いてみないとわかりませんが、ところで、フィボナッチ数列と「黄金比」は直接の関係があります。そして、黄金比は、人間が美しいと感じる比率と言われています。自然の中に黄金比をもつものが多く、われわれがその比率に慣れ親しんでいるからかもしれませんね。

問・高校のとき、先生は $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots$ から $1 = 0.9999\cdots$ と説明してくれたのですが、元々無限に続く循環小数なので無限に続くものを $=$ (イコール) とおいてもいいのでしょうか？

答・そう感じるのもっともものですが、大丈夫です。というのは、無限小数というのは、数列の極限值を表しているからです。つまり、 $0.9999\cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{10^n}) = 1$ ということで等号で結んでよいわけです。

問・ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束して $\frac{\pi^2}{6}$ になるということが、どこかの本に書いてあった気がしますが、どうやって求めるのですか？ π が入っていると、とても不思議です。

答・本当に不思議ですね。証明はできますが、かなり準備が必要なので、この講義では証明できません (将来、証明を聞く機会があれば良いですね)。

問・今日授業でやった $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$ についてですが、教科書の証明は間違っていると思うのですが？“証明”の中で円の面積を使っていますが、僕の知る限りでは、円の面積は、 $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ を x を $\cos \theta$ で置換するこ

とによってのみ求められます。しかし、三角関数の導関数は、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使って求めるので、これは循環論法になっていると思います。高校の教科書も全く同じ証明方法で、高校時代からの疑問でした。

答．良いところに気がつきましたね。間違っているというか「証明ではない」ということですね。その通りです。どうして、高校や大学の教科書で、面積に基づいた説明を行っているかという、もともと三角関数の「定義」が「曲線の長さ」という、直感に訴えた非常にわかりやすい、でもやはり本質的に「積分」を用いた概念に基づいているからです。議論の出発点が（現代的な観点からすると）直感的なのです。でも、微分積分のいろいろな概念に慣れた後は、三角関数は、無限級数の和として厳密に定義することができます。たとえば、 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ が $\sin x$ の定義であると見なされています。この定義からなら、循環論法におちいらずに $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が証明されます（ただし、最初からこんな説明をしてしまうと、どうして $\sin x$ をこんな無限級数で定義するかの動機付けがまったくなくなってしまいますね）。

回答者から．新鮮な質問をありがとう．ではまた．

おまけ

(1) e の無限級数表示： 数列 $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と有限級数 $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ に対し，

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

が成り立つ．

(1) の証明：

まず，

$$t_n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n$$

が成り立つ．また， $n \geq m$ について，

$$t_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

が成り立つ． m を一旦固定しておいて， $n \rightarrow \infty$ とすると， $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = e$ なので， $e \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = s_m \geq t_m$ がわかる． $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = e$ なので，はさみうちの定理から， $e = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ が示される．

(2) e の近似値の誤差の評価： $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$ が成り立つ．

(2) の証明：

(1) から，

$$0 < e - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}$$

(3) e の無理性： e は無理数である（有限小数でも循環小数でも表されない）．

(3) の証明：

e が有理数と仮定して矛盾を導く． $e = \frac{p}{q}$ (p, q は正の整数) とおく．その q に関して，(2) から， $0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}$ が成り立つから， $0 < q!e - q!s_q < \frac{1}{q}$ が成り立つ．仮定から $q!e$ は整数のはずであり，また， $q!s_q = q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q q(q-1)\cdots(q-k+1)$ も整数なので，差 $q!e - q!s_q$ も整数のはず．それが， 0 と $\frac{1}{q}$ の間にはあり得ない．これは矛盾である．この矛盾は e が有理数であると仮定したために生じたので，背理法により， e が有理数ではないこと，つまり，無理数であることが示された．