トポロジーの考え方

石川 剛郎 (北大・理・数学)

Preliminary Version 2 for エンレイソウの会 . 2004年10月

1 トポロジーとは？

「トポロジー (topology¹)」と言った時、トポロジーという”概念”を意味する場合と、その概念を使ったものごとのとらえ方(”方法”)を意味する場合とがある。

トポロジーとは、一言で言えば「ものごとのつながり具合を表現する概念」

トポロジーは「柔らかい幾何学」

連結 (connected) : つながっている状態を意味する形容詞。

空でない2つの閉集合に分けられる²—連結でない . 空でない2つの閉集合に分けられない—連結である . どうつながっているかを気にする . たとえば、円筒とメビウスの帯は、両方とも連結であるが、そのつながり具合が異なっている .

2 トポロジーの分野

トポロジー (位相幾何) の分野を大きく分けると次のようになる³ .

一般トポロジー (general topology) : 位相空間論 , 次元論 . (位相空間の一般論) .

代数トポロジー (algebraic topology) : ホモトピー論 , ホモロジー・コホモロジー論 , 幾何学的群論 . (代数的な位相不変量のための研究) .

微分トポロジー (differential topology) : 4次元多様体論 , リーマン多様体の位相 , 力学系 , 位相変換群論 , シンプレクティック・トポロジー , 特異点論 . (微分幾何や数理物理などとの関連を追求) .

低次元トポロジー (low dimensional topology) : 結び目理論 , 3次元多様体論 , 空間グラフ理論 , 4次元多様体論 .

トポロジーは20世紀になってから発展した数学 (21世紀に応用が花開く!)

3 微分トポロジー

微分トポロジーとは、滑らかな (微分可能な) 多様体⁴と、多様体から多様体への滑らかな (微分可能な) 写像について、滑らかな (微分可能な) 同相写像 (微分同相写像, diffeomorphism) での同一視のもとで研究する方法・分野のことである . 計量によらない不変量をさがす .

微分トポロジーにおける現在までの主なトピックスを挙げる⁵ :

ホイットニー (H. Whitney) : 多様体の概念の確立 . 埋め込み定理 (1930年代) .

¹トポロジー (topology) の ”topo” は「位置」とか「場所」といった意味だそうである . したがって、昔は topology は「位置解析」と呼ばれていた . 「位相」という訳を誰がつけたかは知らない .

²空でない2つの閉集合に分けられる , ということと等価である . しかし、閉集合で述べた方がわかりやすいので、閉集合を用いた説明を採用することにした .

³トポロジーの専門家が皆この分け方に同意する , というわけではない . あくまで目安である .

⁴局所的にユークリッド空間の座標 (チャート) が入るような空間 . 座標変換が微分可能であることを要請する .

⁵もちろん他にも良い仕事がいっぱいある .

モース (M. Morse) : 大域変分法 (“Morse” 理論)(1930年代) .
 トム (R. Thom) : コボルディズム理論の創始 (1950年代) .
 ミルナー (J. Milnor) : エキゾチック球面の発見 (1950年代) .
 スメール (S. Smale) : 5次元以上のポアンカレ予想の解決 (1960年代) .
 アティヤ (M. Atiyah) シンガー (I. Singer) : ディラック作用素の指数定理 (1970年代) .
 フリードマン (M. Friedman) : 4次元ポアンカレの予想の解決 (1980年代) .
 ドナルドソン (S. Donaldson) : ゲージ理論の4次元トポロジーへの応用 (1980年代) .
 サーストン (W. Thurston) : 3次元多様体の分類理論 (1980代~) .
 アーノルド (V. Arnold), グロモフ (M. Gromov) : シンプレクティック位相幾何 (1980年代~) .
 ウィッテン (E. Witten), コンセヴィッチ (M. Kontsevich) : 数理物理と微分トポロジー, ミラー対称性 (1990年代~) .
 ペレルマン (G. Perelman) : ポアンカレの予想 (3次元) の解決 (2000年代) .

4 トポロジカル特異点論

特異点とは, 周囲で際立っている点のこと. 特異点に対象の情報が集約していると考えられる. 特異点の概念はトポロジーと同値関係が特定されれば定まる. 特異点論は主に微分トポロジーや代数幾何とのつながりの中で研究されてきた. とくに, 微分トポロジーとの関係での特異点論の基礎理論は次のように確立されてきたと言ってよい:

ホイットニー (H. Whitney) : 微分可能写像の特異点論 (1950年代) . 空間曲面を平面に写像したときの generic 特異点がフォールド (fold) とカスプ (cusp) .

トム (R. Thom) : カタストロフ理論 (1960年代) . 正則横断性の概念. 形態形成を関数の特異点で説明する試み .

マザー (J. Mather) : 安定写像の特異点の分類 (1960年代末から70年代) . 無限小構造安定性, 特異点の分類の基礎理論の確立 .

アーノルド (V.I. Arnold) : ラグランジュ・ルジャンドル特異点論 (1970年代~) . 焦点, 波面など種々の現象に現れる特異点への応用 .

石川剛郎のいままでの主な仕事は, 上のような流れの中での特異点論の応用とそのための基礎理論の整備, 具体的な特異点の分類, に関するものです. たとえば, 特別な曲面を持つ特異点 (たとえば, 可展面の特異点) の分類, 微分方程式 (モンジュ・アンペール方程式) の特異点の分類, 射影幾何・シンプレクティック幾何・接触幾何への特異点の応用, 制御理論への応用などです. 「応用特異点論, 実代数幾何」と呼べる分野が専門です.

5 空間曲面のトポロジーと微分幾何と特異点論

3次元空間内の曲面について, 現代数学の立場から, 基本的な概念, 用語, 現在行われている研究の傾向について概説する.

空間曲面 (表面, 界面, ...) に対して, その曲がり具合を表現する量として, 曲率 (曲面の場合は, ガウス曲率と平均曲率) が定義される. 曲線や曲面それ自体に特異点がなくとも, その曲がり具合が特異な点がある. 放物点 (hyperbolic point) や臍点 (へそてん, せいてん, umbilic) などである. それらは, ガウス写像や双対曲面 (dual surface) を見ることにより, 特異点としてはっきり見ることができる. (文献: 泉屋・佐野) .

空間曲面 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ が $(u, v) = (u_0, v_0)$ で特異点を持つとは, 偏微分の外

積 $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}$ が $(u, v) = (u_0, v_0)$ で零ベクトル $\mathbf{0}$ になること⁶ .

ちなみに、写像 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ が $(u, v) = (u_0, v_0)$ で特異点を持つとは、ヤコビアン $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ が 0 になること .

特異点がない場合をはめ込み (immersion) , この場合は自己交差はあり得るが、自己交差点がない場合、埋め込み (embedding) という⁷ .

曲面の場合のガウス写像 (単位球面への写像) の式 :

$$(u, v) \mapsto \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}$$

曲面の場合の双対曲面の式 :

$$(u, v) \mapsto \frac{\mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right)}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right\|^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}$$

曲面のガウス曲率は、ガウス写像の面積比の極限值として定義される . ガウス曲率が恒等的に零である曲面 (言い換えるとガウス写像が一定値である曲面) を可展面 (developable surface) とよぶ . 可展面は、局所的には平面に展開できるような曲面のことである⁸ . 可展面は大域的には、一般に特異点をもつ⁹ . 可展面の特異点はトポロジカルに 8 種類に分類される (石川 剛郎, (1994–2000) .

可展面の他にも、特別な曲面 (ガウス曲率一定曲面, 極小曲面, 平均曲率一定曲面など) の大域解析, トポロジー, 特異点の研究が (20 世紀の発展を背景に) 現在盛んに行われている . また応用 (視覚理論, 映像理論, グラフィクス理論, デザインなど) も盛んである .

6 トポロジーの歴史 (19 世紀まで)

この節の内容はセントアンドリュース大の web-page

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html

による .

「トポロジー」は、オイラー (Euler) にはじまる . 1736 年に「ケーニヒスベルグの橋の問題」を解決した論文を出版した . (Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis 日本語で「位置の幾何学に関する問題の解決」 . オイラーは明らかに、距離という考え方にとらわれない幾何学を扱っている . この論文では、7 つの橋を一回ずつ渡る問題が不可能であることを示しただけではなく、問題を一般化し、現代の言葉で言えば「グラフが、各辺を 1 回だけ通る経路をもつための必要十分条件は、2 頂点の次数が奇数であるか、または、すべての頂点の次数が偶数であること」を示している .)

さらに 1750 年にオイラーは、多面体の頂点の個数 v 、辺の個数 e 、面の個数 f について、

$$(1) v - e + f = 2$$

が成り立つという、有名なオイラーの公式を記した手紙を残している . この簡単な公式が、多面体に関して多くの研究を残したアルキメデス (Archimedes) やデカルト (Descartes) には見逃されていることは興

⁶ヤコビ行列の階数が落ちるところ

⁷さらに、埋め込みの像への同相写像であることを要請することもある

⁸平面と局所等長的 . 平坦

⁹特異点を持たないのは、平面や柱面に限る .

味深い。オイラー以前の人たちにとって、計量が関係しないような幾何的な性質を想像することが不可能だったことがその理由だろう。

オイラーは1752年にこの公式の詳細を2つの論文にして発表している。第1論文では証明に至っていないが、第2論文では、多面体を4面体に分割することによる証明を与えている。オイラーは、この驚くべき巧みな証明が、凸多面体にしか通用しないことには気づいていない。

オイラーによって始められたトポロジーの流れは、あまり知られていない数学者ルイリエール (Lhuillier, 1750-1840) によって受け継がれた。彼は一生のほとんどをオイラーの公式に関係した問題に費やした。1813年に彼は重要な論文を発表した。オイラーの公式は、穴の開いた多面体については正しくないことを注意し、もし、 g 個の穴が開いている場合、

$$(2) v - e + f = 2 - 2g$$

が成り立つことを示した。

メビウス (Möbius) は、1865年にいわゆる「メビウスの帯」に関して書いている。メビウスは、メビウスの帯に裏表がないという性質を「向きづけ不可能」という言葉で記述している。彼は、この曲面を整合的に向きのついた3角形で覆うことができないことを見つけた。

「トポロジー」(topology) という言葉を初めて使ったのはリステイング (Listing, 1802-1882) である。リステイングのトポロジーに関するアイディアは、ほとんどガウス (Gauss) に依っている。(ガウス自身にトポロジーに関する著作はないが)。リステイングは1847年に「Vorstudien zur Topologie」(トポロジーの予備研究) という論文を書いているし、それ以前も書簡でトポロジーという言葉を使っている。1847年の論文では、複体 (complex) という概念も導入している。リステイングは、1861年にメビウスの帯を記述した重要な論文を発表している。メビウスの4年前である。そこでは、曲面の連結性についても研究している。

曲面の連結性を研究しているのは、リステイングが最初ではない。リーマン (Riemann) は1851年(25歳のときの学位論文)、それから1857年の論文で曲面の連結性を論じている。1857年の論文とは、リーマン面が導入された。代数方程式 $f(w, z) = 0$ の研究から生じた。 z を変化させたとき、この方程式を満たす $w(z)$ (一般には多価関数) がどう変化するかが問題である。リーマンは多項式 $f(w, z)$ から定まるリーマン面を導入した。リーマン面の上では、関数 $w(z)$ が一価関数となる。

ジョルダン (Jordan) は、曲面の連結性を調べるもう一つの方法を導入した。ジョルダンは、曲面上の単純閉曲線 (サーキット) が一点に連続的に変形できないとき、それを (既約) サークットと呼んだ。その曲面のすべてのサーキットが整数係数で

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n$$

と一通りに表されるような既約サーキットの組 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の個数 n が曲面の位相不変量であることをジョルダンは証明している。

リステイングは連結性を3次元ユークリッド (Euclid) 空間の中で調べているが、ベッチ (Betti) は一般次元の場合に拡張して考えた。最終的に連結性の概念を厳密に基礎づけたのはポアンカレ (Poincaré) である。1895年の一連の論文「Analysis situs」で、「ホモロジー」の概念を導入し、空間の「ベッチ数」を、ベッチ自身が与えたものよりも明解に定義した。そして、ポアンカレは、オイラーの公式を、一般の枠組みに拡張することができた (オイラー・ポアンカレ標数の誕生)。

同じく1895年の論文で、ポアンカレは「基本群」と「ホモトピー」の概念を導入している。

トポロジーが発展した第2の流れは「収束」の概念の拡張から生じた。1817年、ボルツァノ (Bolzano) は、収束の概念を実数列の収束にこだわらず、数直線内の無限集合に関して考察した。

1872年にカントール (Cantor) は、「第1導来集合」あるいは「極限点集合」の概念を導入し、実直線の「閉集合」を、その第1導来集合を含むような集合として定義した。カントールは、もう一つの基本概念である「開集合」も定義した。

ワイヤシュトラス (Weierstrass) は 1877 年に講義録の中でボルツァノ・ワイヤシュトラスの定理の厳密な証明を与えている：

数直線上の有界無限集合 S は、少なくとも 1 つの集積点 p をもつ。すなわち、 S の無限点列 a_n で、 $|p - a_n| < \frac{1}{n}$ を満たすものが存在する。

こうして、「近傍」の概念が導入された。ヒルベルト (Hilbert) は、1902 年に、近傍の概念を使って、連続群 (位相群) に関して研究した。

7 トポロジーの基本用語抄

同相 (homeomorphic)：形容詞。ある図形 (領域) が、別の図形 (領域) と、そのつながり具合をまったく保って移し合わせることができること。「位相的に同型」とか「topological に同じ」とも言う。使用例：三角形 (の境界) と円周は同相。(関連語：homeomorphism(名詞))。

イソトピー (isotopy)：名詞。図形を同相のまま移動する変形のこと。使用例：結び目理論は、結び目をイソトピーで分類する理論。

ホモトピー (homotopy)：名詞。図形 (正確には「写像」) の連続的な変形のこと。その際、曲線や曲面を 1 点につぶすなどの操作は (連続的であるかぎり) 許される。使用例：メビウスの帯を円周に変形するホモトピーがある。(関連語：homotopic(形容詞))。

開集合 (open set)：名詞。扱っている図形 (領域、空間) の中の点の集まりで、各点に十分近い点が集まりに属するようなもの。「境界点」を含まない集合。「位相」の概念は、開集合という言葉を使って厳密に述べられる。

閉集合 (closed set)：名詞。扱っている図形の中で、補集合 (残りの部分) が開集合であるもの。「境界点」をすべて含む集合。使用例：連結とは、空でない 2 つの閉集合には分解できない状態のこと。「開集合」の代わりに「閉集合」をもとに「位相」の概念を述べることもできる。

連続写像 (continuous mapping)：名詞。ある図形から別の図形への対応関係で、「ジャンプ」が生じないもの。行き先の近さを出発点の近さによってコントロールできるような対応。連続写像で写せば、連結なものも連結なものに写る。関連語：連続な (continuous)：形容詞。

8 トポロジーの本

—トポロジーとは？

川久保勝夫 著「トポロジーの発想」ブルーバックス B1076 講談社。ISBN 4-06-257076-9
トポロジーの考え方を知るのに最適な啓蒙書。

本間龍雄 編「新しいトポロジー」ブルーバックス B214 講談社。ISBN 4-06-117814-8
現在品切れ。安野光雅氏による表紙。

永田雅宜 監訳、足立正久、小島誠訳「幾何学からトポロジーへ」紀伊国屋書店。
現在絶版。

本間龍雄・岡部恒治 著「微分幾何とトポロジー入門」基礎数学叢書 6，新曜社。ISBN 4-7885-0900-6
基本的な話題を手際良く解説。

—トポロジー入門

松本幸夫 著「トポロジー入門」岩波書店。ISBN 4-00-005729-4

トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書。

小島定吉 著「トポロジー入門」21世紀の数学 7，共立出版。ISBN 4-320-01559-2

トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書。

田村一郎 著「トポロジー」岩波全書，岩波書店。ISBN 4-00-021413-6

3角形分割やホモロジーに詳しい。

河田敬義 編「位相幾何学」現代数学演習叢書 2，岩波書店。ISBN 4-00-005149-0

古いが，よい演習書．

C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press.1980. ISBN 0-521-29864-4
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書．

—結び目理論

鈴木晋一 著「結び目理論入門」サイエンス社．ISBN 4-7819-0633-8

結び目理論の比較的わかりやすい入門書．

L.H. カウフマン著，鈴木晋一・河内明夫 監訳「結び目の数学と物理」培風館．ISBN 4-563-00237-2
おもしろい話題が豊富．

L.H. Kauffman, Knots and physics. Third edition. Series on Knots and Everything, 1. World Scientific
ISBN: 981-02-4112-7

河内明夫 編著「結び目理論」シュプリンガー・フェアラーク東京 ISBN 4-431-70571-6

結び目理論の概観を得るのに最適な専門書．

—特異点と微分幾何

トポロジーは微分幾何学 (曲率など) の知識があると，より活用できる．

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何」裳華房. 微分幾何の定評ある入門書．

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面」裳華房．ISBN 4785315318

新しい微分幾何の教科書．上の2冊ともに，閉曲線や閉曲面¹⁰のトポロジーと曲率の関係 (ガウス・ボンネの定理など) も説明されている．

泉屋周一・佐野貴志 著「幾何学と特異点」特異点の数理 1，共立出版．ISBN 4-320-01670-x
幾何学にあらわれる特異点を解析する基本的な方法の概説．いろいろな可視化に活用できるのでは？

泉屋周一・石川剛郎 著「応用特異点論」共立出版．ISBN 4-320-01594-0

特異点論の応用に関する専門書．

V.I. Arnold, Catastrophe theory. Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 1992. ISBN: 3-540-54811-4
カタストロフ理論に関する良い概説．

T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications. ISBN: 0-486-69271-X
カタストロフ理論の応用に詳しい．

J.F. Nye, Natural Focusing and Fine Structure of Light, Caustics and Wave Dislocations. Institute of Physics Publishing, 1999. ISBN 0-7503-0610-6

特異点論，カタストロフ理論の光学への応用．

—トポロジーと物理

倉辻比呂志 著「トポロジーと物理」パリティ物理学コース，丸善．ISBN 4-621-04045-6

Giuseppe Morandi, The Role of Topology in Classical and Quantum Physics, Lecture Notes in Physics, m7, Springer-Verlag (1992). ISBN 3-540-55088-7

以上私 (石川) が知っている本を無作為に挙げてみました．他にも良書はたくさんあると思います．(20 Oct. 2004)

¹⁰特異点がなく有界閉集合になっているもののこと．閉集合ということよりは強い意味で使う．