

上空移行の原理とその周辺

大沢健夫

1. はじめに

数学史に大きな足跡を残した人々のうち、特筆すべき日本の3人をあげるなら関孝和、高木貞治、岡潔であろうか。関は消去法と円理、高木は類体論、岡は多変数関数論で有名である。これらの業績について踏み込んで詳しく書かれたものも多いのだが、この度、非専門家向けに岡の「上空移行の原理」を解説せよというお求めをいただいたので、以下では特にこれに関わる部分を選んで、岡の第一論文を中心に解説したい¹。ちなみに最近よく見る「岡の原理」というものもあり、こちらは岡が第三論文で確立した定理を Serre がそう呼んだのが最初で、後に Grauert や Gromov らによって一般化された。これに対し、上空移行の原理は岡が周囲に会心の発見と自賛したと言われる²割には、岡の原理ほどには有名ではない。端的には、岡の第一論文(1936年)に書かれている「空間の次元を上げると問題が易しくなることがある」というアイデアがそうなのだが、これだけでは数学上の原理と呼ぶにはやや物足りない。とはいえ、これを特別な場合に実現したとされる第一論文では、関数の拡張定理とその応用が示されているので、関数の定義域を次元の高い空間へと広げることができる状況が活用できることは確かであり、少なくとも狭い意味ではこれが岡の意図したところかと思われる。そこで本稿では最初にこの意味での上空移行原理について、その背景を復習しながら実例に即して解説し、広い意味の上空移行原理について、岡が語ったとされる言葉を引きながらも最近の研究の動向に鑑みて、複素多様体上の Levi 問題の解もそれにあたるのではという管見をあえて述べることにしたい。

2. 拡張問題と補間問題

上で述べたように、上空移行の原理は岡の第一論文の拡張定理を敷衍したものと言ってよいかと思う。よってこの定理とその応用を述べ、

¹この原稿は、「第30回沼津改め静岡研究会－幾何、複素解析、そして数理物理－」のためのものである。

²中野茂男先生作の「岡潔頌」には「世の人こそり優秀と推すを措きて最先に我が意得たるは第一の作なりと高らかに述べてけりとは我が師なる秋月大人の傳へてし言にてありけり」とある。ここの「世の人こそり優秀と」は不定域イデアルの概念の導入や Levi 問題の解決を指すと思われる。これらの一端にもふれるであろう。

このことがどのように一般化し得るのかを考察することが小論の目的となる。しかしその本論に入る前に、この岡の仕事が画期的であった理由を説明するため、拡張問題について二三のよく知られた事実を復習しておきたい。

拡張問題は最初、天体の運動を観測データから正確に予測するための補間問題として現れた。それが Taylor 展開や Lagrange の補間公式の先駆けであったのだが、数学的なアイデアとしては、Euclid の「2 点を結ぶ直線が 1 本存在する」がそもそもの出発点だったかもしれない。それが Descartes の座標幾何や Newton の補間公式を経て Maclaurin や Taylor の定理へと展開したのだとすれば、多変数関数論においても、補間理論の枠組みがその延長上で構想されたのは当然であろう。

補間問題とは部分的に与えられた値を持つ関数を作る問題で、おおまかには存在と一意性の二つの部分からなる。19 世紀に高度な発達を遂げた複素一変数関数論の中で、この問題が一つの明解な解決を見たことに注意しよう。その事情は複素関数論成立の経緯と深く関わっている。複素関数論の初期の有名な仕事の一つに Abel による楕円関数の発見がある。Abel は楕円積分の逆関数が複素平面上の 2 重周期の有理型関数に他ならないことを見出したのだった。この楕円関数から代数関数論を経て保型関数に至る関数論の展開の中で、三角関数や楕円関数の部分分数分解や無限積分解を一般領域上の理論として基礎づける Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の乗積定理が得られた。具体的には (簡単のため層の言葉で記すが)、

定理 1. (Mittag-Leffler) $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω に対して、自然な射影準同型

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{M}/\mathcal{O})$$

は全射である。($\Longleftrightarrow$ 孤立点からなり Ω 内に集積点を持たない部分集合 S に対し、制限写像

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{M}/\mathcal{O})$$

は全射である。) ³

定理 2. (Weierstrass) Ω と S を上の通りとすれば、制限写像

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma(S, (\mathcal{O} \cap \mathcal{M}^*)/\mathcal{O}^*)$$

は全射である。⁴

実際には定理 2 は定理 1 の系であるが、Mittag-Leffler は Weierstrass に encourage されながら 6 年にわたる辛苦の果てに論文を仕上げたのだそうである。同時期に示された Runge の近似定理も重要なものの一つである。定理 1 がこれなしでも示せるようになったのは前世紀後半以

³ $\mathcal{M}, \mathcal{O}$ はそれぞれ ($\mathbb{C}$ 上の) 有理型関数の芽の層および正則関数の芽の層を表し、 $\Gamma(X, \mathcal{F})$ は層 $\mathcal{F}$ の X 上の切断の集合を表す。

⁴ $\mathcal{M}^*$ は $\mathcal{M}$ の乗法的可逆元の集合で、 $\mathcal{O}^*$ は零点を持たない正則関数の芽の層。

後のことであるので、Mittag-Leffler が苦労したのも当然であろう。これも岡理論と密接な関係にあるので思い出しておこう。

定理 3. (Runge) $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω に対し、

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) = \overline{\mathbb{C}(z) \cap \Gamma(\Omega, \mathcal{O})}$$

が成り立つ。ただし $\mathbb{C}(z)$ は複素変数 z の有理関数の集合を表し、右辺における閉包は Ω 上での広義一様収束の位相に関するものとする。 $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$ が連結ならば $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) = \overline{\mathbb{C}[z]}$ である。ただし $\mathbb{C}[z]$ は z の多項式の集合を表す。

正則関数に対する補間定理も、この文脈の中で多項式に対する Lagrange の補間公式を一般化する形で得られた。その証明は Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の乗積定理を組み合わせ得られる。それを手短に復習するなら以下の通りである。

$A \subset \mathbb{N}$, $S = \{\gamma(k); k \in A\}$ のとき、 $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ を $g^{-1}(0) = S$ となるように取り、 $c \in \mathbb{C}^A$ に対して $h \in \Gamma(\Omega, \mathcal{M})$ を、 h の $\gamma(k)$ での芽が $\frac{c(k)}{g_{\gamma(k)}'} + \mathcal{O}_{\gamma(k)}$ に属するようにとれば⁵、 $f = hg \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ であり、 $f(\gamma(k)) = c(k)$ となる。

ちなみに、Lagrange の補間公式は $\#A < \infty$ の場合だが

$$g(z) = \prod_{k \in A} (z - \gamma(k))$$

$$h(z) = \sum_{k \in A} \frac{c(k)}{g'(\gamma(k))(z - \gamma(k))}$$

とおけば

$$\sum_{k \in A} c(k) \prod_{j \in A \setminus \{k\}} \frac{z - \gamma(j)}{\gamma(k) - \gamma(j)} = h(z)g(z)$$

となる⁶。

⁵ $\mathcal{O}_x$ で x における $\mathcal{O}$ の茎を表す。

⁶信号解析理論で有名な Whittaker-Kotel'nikov-Shannon のサンプリング定理の式

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{W}\right) \frac{\sin \pi(Wt - k)}{\pi(Wt - k)} \quad (W > 0)$$

も同種の公式である。

3. 多変数関数論の成立と上空移行

楕円モジュラー関数などの保型関数の自然な定義域が複素平面全体ではなく半平面や単位円板などであることは Weierstrass を驚かせたと言われるが、一般領域で基本的な存在定理が述べられるようになった背景には、Riemann による等角写像の基本定理の発見と並んでこういった事情があったのであろう。

いずれにせよ、関数論における基本的な諸結果とそれらの関連性は、複素一変数関数論の枠組みの中で初めて満足すべき正確さで理解されるようになったのである。その結果として現在の大学二年次の複素関数論の教程があることは周知であろう。

この美しい理論の多変数への一般化は自然な問題であり、Jacobi による楕円関数の多変数版の発見以来、最初は Weierstrass や Riemann により n 変数の $2n$ 重周期関数すなわち Abel 関数の理論として展開された。これは今でいう Abel 多様体上の関数論だが、ここから一般領域上の多変数関数論が成立するまでには幾多の紆余曲折があったのである。Poincaré はアーベル関数が整関数の比として書けることを示し、一般領域ではどうなるかを問題とした。与えられた主要部を持つ有理型関数を作るのが Mittag-Leffler 型の問題で、零点集合を与えて正則関数を作るのが Weierstrass 型の問題である。Poincaré が解いたのは後者の特別な場合だが、Cousin は直積型の領域上で両方とも解いた。

定理 4. (Cousin) $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ を $\mathbb{C}$ 内の領域とし、 $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ とおくと、

- I) $\Gamma(\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{M}/\mathcal{O})$ は全射である。
- II) $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma(\Omega, (\mathcal{O} \cap \mathcal{M}^*)/\mathcal{O}^*)$ は、 Ω_j が高々一個を除いて単連結ならば全射である。

より一般的な状況ではどうかという問題は、それぞれ Cousin の第一問題 (または Cousin I)、第二問題 (または Cousin II) と呼ばれる。Cousin の論文が出たのが 1895 年で、任意の領域上で Cousin の問題が解けるわけではないことはすぐに知られるようになったらしい。それは 1897 年に Hurwitz が第 1 回の ICM (国際数学会議) の講演で、多変数の正則関数は孤立特異点を持ちえないことを注意したことからも推測できる。Hurwitz のこの指摘は、1906 年の Hartogs が正則領域⁷の擬凸性を示した論文により大幅に一般化され、これにより正則領域上の本格的な多変数関数論が緒に就いた。擬凸性とは通常の幾何学的凸性に類似の性質で、 $\mathbb{C}^n$ 内の領域 Ω については次のように定義される。

⁷ $\mathbb{C}^n$ 上の層 $\mathcal{O}$ の連結成分を $\mathbb{C}^n$ への局所双正則写像を伴った複素多様体とみなしたものを、($\mathbb{C}^n$ 上の) 正則領域と言う。

定義 1. 二重円板 $\mathbb{D}^2 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1, |w| < 1\}$ から $\mathbb{C}^n$ への写像 $F = (f_1(z, w), f_2(z, w), \dots, f_n(z, w))$ に対し、

$$F\left(\left\{(z, w) \in \mathbb{D}^2; |z| < \frac{1}{2} \text{ or } |w| > \frac{1}{2}\right\}\right) \subset \Omega$$

ならばつねに $F(\mathbb{D}^2) \subset \Omega$ であるとき、 Ω は (Hartogs の意味で) 擬凸であるという。

$\mathbb{C}^n$ がこの意味で擬凸であることは Cauchy の積分公式の系であるが、(Weierstrass 式には) Laurent 級数を用いても示せる。一方、Cousin の問題が解ければ Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の乗積定理も一般化できるので、それらを組み合わせることができる状況では多変数でも補間問題が解けるわけである。H. Cartan の 1930 年の論文 [C] では 2 変数の補間問題をこの方法で解いている。この時点では正則領域上で Cousin の問題が解けるかどうかは不明であったが、1932 年に発表された Cartan と Thullen の論文 [C-T] では、 $\mathbb{C}^n$ 内の任意の正則領域 Ω が $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ に関して次の意味の凸性 (正則凸性) を持つことが示された。

定理 5. Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の正則領域とすれば

任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し

$$\hat{K} := \{p \in \Omega; |f(p)| \leq \sup_{q \in K} |f(q)|, \forall f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})\}$$

はコンパクトである。

これは重要な仕事で、Cousin の問題を初めて一般的な高次元の領域で解いた岡の第一論文への草分けとなった⁸。その岡論文では、有理関数の集合に関して同様の凸性の条件を満たす領域 (有理凸状域) に対して Cousin I が解かれている。

では、「多変数解析関数について I —— 有理関数に関する凸状域」と題されたこの論文の冒頭部を読んでみよう。以下は西野利雄先生⁹による訳 (奈良女子大・岡文庫) である。

序文. 複素多変数解析関数論の近年の進展にもかかわらず、いくつかの重要な事柄が大なり小なり解明されないまま残されている。特に、Runge の定理や P. Cousin の定理が成り立つ領域のタイプ、F. Hartogs の凸性と H. Cartan と P. Thullen の凸性の関係; しかもそれらの間には深い関係がある。この論文およびこれに続く論文で予定されているのはこれらの問題の研究である。

ところで、私に次の考えが浮かんだ。すなわち、考えている空間の次元を適当に上げることによって、これらの問題の困難さがときとして緩

⁸岡は、問題を決めてから最初の論文が書けるまで 7 年かかったと述べている (朝日ジャーナル 1964 年)。これから察するに、[C] は第一論文への重要な動機を与えたと思われる。

⁹1932-2005. 筆者は京都大学の 4 回生のセミナー (講究) で指導を受けた。

和されるのではないか. この論文では, この一般的なアイデアを特別な場合に実現するために, 表題の領域をより高い次元の筒状域¹⁰に帰着させるという一つの原理を示そうと思う. (具体的な形は1節の問題1を見よ.)

この「問題1」というのが拡張問題であり、有理関数を成分とするベクトル値関数 $(R_1(z_1, \dots, z_n), \dots, R_\mu(z_1, \dots, z_n))$ のグラフを多重円板 $\mathbb{D}^{n+\mu}$ 内に限った集合を Σ とするとき、 Σ 上の正則関数を $\mathbb{D}^{n+\mu}$ 上に正則関数として拡張できるかというものである。問題1に続けて述べられた問題2は Σ 上の Cousin の第一問題で、問題1と問題2は μ に関する帰納法で解かれる。その結果、 Σ 上での Cousin I の可解性が定理1として、拡張問題の可解性が定理2として述べられている。さらに Weil により示された Runge 型の近似定理が定理2の系であることも注意されている¹¹。ポイントは Cousin I と拡張問題の同等性であり、補間定理と言えば Lagrange の公式に毛の生えた程度のもんと思っていたであろう当時の数学者たちを驚かせたことは想像に難くない。念のため、後に一般化されたこの同等性を層とコホモロジーの言葉で書いておくと、正則領域 Ω 内の解析的閉部分集合 A に対し A 上で零になる正則関数の芽の層を $\mathcal{I}_A$ とすれば、完全列

$$(\star) \quad \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{O}/\mathcal{I}_A) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{I}_A) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O})$$

により $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{O}/\mathcal{I}_A)$ の全射性と $H^1(\Omega, \mathcal{I}_A) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O})$ の単射性が同等となるというのが、今日的な、狭い意味での上空移行の原理である。ただし岡自身はこのような言い換えを好まなかったと言われ、上空移行のアイデアを初学者に説明するときに挙げた例は3次方程式の解法の一つだったそうである。

閑話休題、第二論文では正則凸領域へと第一論文の結果が拡張された。Cousin の第二問題に関しては、第三論文で「正則凸領域上では解の存在は連続解の存在と同等である」という決定的な命題に達した。しかし $\log z$ のような無限多価正則関数の存在域を含む一般の ($\mathbb{C}^n$ 内の」でなく $\mathbb{C}^n$ 上の」) 正則領域に関してはどうかはまだわからなかった。この問題は、集大成ともいべき岡の第九論文において、「 $\mathbb{C}^n$ 上の局所擬凸領域は正則凸である」という一般的な形で解決された (1953年)。これがいわゆる Levi 問題¹²の解である。正則領域上での Cousin の問題の解決を含む一般論のテキストが出だしたのが1960年代だったが、そこまでの間に次々と独創的なアイデアを持ち込みながら多変数関数

¹⁰直積領域

¹¹ここにち「岡-Weil の近似定理」の名で知られる。Weil の証明は Cauchy の積分公式の多変数版によるが、岡の証明は拡張定理を用いるだけである。つまり、 Σ 上の問題が $\mathbb{D}^{n+\mu}$ 上の問題になるので、結局は正則関数の Taylor 級数の収束性に帰着されてしまう。

¹²岡は「Hartogs の逆問題」と呼んでいた。

論の分野を切り開いたのが岡潔であり、第一論文で謳われた上空移行はいわばその指導原理であったと言うこともできよう。実際、岡の自伝的随筆である『春宵十話』によれば、第五論文まではこのときのアイディアを基にして書けたそうである。

ちなみに、春宵十話の「数学の思い出」という話は岡がフランス留学時に研究結果を Fréchet と Denjoy に見てもらった時のことで、結果が当時発表されたばかりの Denjoy の論文の結論に反することを教えられて赤面したという話だが、この時の Denjoy の論文 [D] では、 $\mathbb{D}$ 上で有界な正則関数に対しては、値の与え方によっては補間問題の解が一意的であることが述べてある¹³。

多変数関数論の中心的な問題が岡によって解かれた結果、次の世代は新たな課題を見出して取り組むことになった。日本では西野利雄、中野茂男、武内章らが注目すべき成果を上げたが、特に指導的役割をになったのはドイツの Grauert¹⁴であった。Grauert による岡理論の複素多様体上への一般化は、その後の多変数関数論に大きな影響を与えた。つぎに最近の研究結果を含むそこからの展開の一端にふれてみよう。

4. 多変数関数論の展開 (20 世紀後半以後)

岡理論以後の多変数関数論の展開において、最初の大きなブレイクスルーは Grauert による次の定理であろう。

定理 6. n 次元複素多様体 M から $\mathbb{C}^N$ へのプロパーな正則写像 f とコンパクトな複素解析集合 $E \subset M$ が存在して $f|_{M \setminus E}$ が像の上への双正則写像になるためには、皆既的¹⁵ C^2 級関数 $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ とコンパクト集合 $K \subset M$ が存在して $\partial\bar{\partial}\varphi := \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j d\bar{z}_k$ ¹⁶ が $M \setminus K$ 上正定値であることが必要かつ十分である。

¹³関数のクラスを限ることによって補間問題の解の一意性を保証し、解として関数の展開式を得るのが Lagrange 流の補間理論とも言えるだろう。それに対し、岡の関心が解の存在の方にあったことが窺える。

¹⁴Hans Grauert (1930-2011). 岡が多変数関数論の中心的な問題を読み取ったのは Behnke と Thullen の総合報告からであったが、第 2 次大戦後のドイツで、Münster 大学の Behnke 教授のもとで育った俊秀の一人が Grauert であった。

¹⁵ $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ が皆既的であるとは、任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $M_c := \{p \in M; \varphi(p) < c\}$ が相対コンパクトであることを言う。

¹⁶ φ の複素 Hesse 形式を M の局所座標 $(z_1, \dots, z_n)$ を用いてこう表す。混同の恐れがある場合を除き、 $\partial\bar{\partial}\varphi$ で微分形式 $\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ も表す。 $\partial\bar{\partial}\varphi$ が点 p で正定値であるとき、 φ は p で強多重劣調和であるという。

複素多様体 Ω が $\mathbb{C}^n$ 上の局所擬凸領域であれば、Euclid 距離に関して境界までの距離を測って定義される関数

$$\delta_\Omega : \Omega \rightarrow (0, \infty]$$

について、岡が第六論文で見出した通り $-\log \delta_\Omega$ は多重劣調和関数になり、このことを用いると Ω は定理 6 の M の条件を ($K = \phi$ として) 満たすことがわかる。

定義 2. 定理 6 の条件を満たす複素多様体を強擬凸多様体という。複素多様体 M 内の C^2 級の実超曲面を境界に持つ相対コンパクトな領域 Ω が、 $\partial\Omega$ の近傍で強多重劣調和な関数 ρ で $\partial\Omega$ 上で微分が消えないものを用いて

$$\Omega = \{p \in M; \rho(p) < 0\}$$

と書けると、 Ω は強擬凸領域であるという。

岡の第一論文における上空移行の原理の実現をコホモロジー群を使って簡略化した形で書けば

$$\Gamma(\mathbb{D}^{n+\mu}, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma) \text{ が全射} \iff H^1(\mathbb{D}^{n+\mu}, \mathcal{I}_\Sigma) = 0$$

となる。すなわち拡張定理は 1 次コホモロジーの消滅と同等である。この視点を初めて与えたのが岡潔であったことは強調しても強調しすぎることはないだろうが、これに対して、定理 6 の Grauert の証明は 1 次コホモロジーの有限次元性によるのであり、強擬凸領域の境界点の近傍上で定義された正則関数で、その零点集合が領域の外部から境界点で接する零点をもつものを用いる。この証明のポイントは、実質的には前節で挙げた完全列 $(\star)$ を使って

$A \subset M \setminus \overline{M_c}$ のとき、制限準同型 $H^1(M, \mathcal{I}_A) \rightarrow H^1(M_c, \mathcal{I}_A)$ が同型なので $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O}/\mathcal{I}_A)$ は全射である。

の形でも述べることができる。

定理 6 は岡理論の一般化だが、同時に 1956 年に発表された学位論文 [G-1] の続きでもある。[G-1] の目的とするところは、Stein 多様体すなわち $\mathbb{C}^N$ にプロパーな正則写像で埋め込める複素多様体の微分幾何的特徴づけであり、[G-2] は岡理論の延長上でそれを達成したことになっている。[G-1] は小平の埋め込み定理 (1953 年) にも影響を受けた方向の研究で、[G-2] は岡理論と小平理論を並立させた意味も持っている。[G-3] では強擬凸多様体上の有限性定理の系として小平の消滅定理を示している。この後、岡理論と小平理論は統一される方向に向かい、その一つの結果として Hörmander らの L^2 評価式の方法が生まれたりするのだが、その辺の話はまた別の機会にさせていただくことにしたい。

参考文献

[C] Cartan, H., *Sur les fonctions de deux variables complexes*, Bull. Sci. Math. 54 (1930), 99-116.

[C-T] Cartan, H. and Thullen, P., *Zur Theorie des Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen*, Math. Ann. 106 (1932), 617-647.

[D] Denjoy, A., *Sur une classe de fonctions analytiques*, C.R. Acad. Sci. 1929.

[G-1] Grauert, H., *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik*, Math. Ann. **131** (1956), 38-75.

[G-2] ———, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. Math. 68 (1958), 460-472.

[G-3] ———, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[O] Oka, K., *KIYOSHI OKA COLLECTED PAPERS*, translated from the French by R. Narasimhan With Commentaries by H. Cartan Edited by R. Remmert. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

付録 (その 1)

岡潔頌¹⁷

数学の 道攻めんと 岡教授 選びし分野は 多変数 複素函数
 先達の 手かけそめにし あらくれの 野を開かんと 茨伐り 石取
 り除き 木の根ほり 巖をうがつ 三十年の 辛苦の果の 主なる著
 作 それぞれに 重き問いかけ 遂げしわざ 珠とかがやく そが中
 に 世の人こそり 優秀と 推すをば措きて 最先に 我が意えたる
 は 第一の 作なりけりと 高らかに 述べてけりと は 我が師なる
 秋月大人の 傳へてし 言にてありけり 自らも 直にききえし 岡
 大人の 感慨一言 「第一の 作成了とき 天地の 我を最中と
 一列に 整ひ並びき」 感激を 今に傳へて 思ひ出づる 言にてあ
 りけり 宜なりや 論理の道を 辿りえて 心にかなふ わざを遂げ
 宇宙の秩序を あるままに その身につけて 感ぜしは 自然の法を
 数学に 求めんとする 岡大人の いとも意にそふ いさをなり 後
 の我等の しるべなり 我ひと共に のちの世に 言ひつぎ行かむ岡
 の心を

反歌

数学は 自然を描写 するものと 先師の言の 偲ばるるかな

¹⁷中野茂男先生がかつて同人誌に寄稿された長歌を武内章先生の定年退職の記念として揮毫された。

付録 (その 2)

以下は最近の拙著 (preprint)

Notes on the extension of Grauert's solution of the Levi problem to weakly pseudoconvex domains

の文献表である。

REFERENCES

- [A-V-1] Andreotti, A. and Vesentini, E., *Sopra un teorema di Kodaira*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 283-309.
- [A-V-2] ———, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81-130.
- [A-S] Anghern, U. and Siu, Y.-T., *Effective freeness and point separation for adjoint bundles*, Invent. Math. **122** (1995), 291-308.
- [Bl] Blocki, Z., *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. **193** (2013), no. 1, 149-158.
- [Cao] Cao, J.Y., *A Note on an Algebraic Criterion for Compact Kähler Manifolds*, arXiv:2502.02183 [math.CV]
- [Dm-1] Demailly, J.-P., *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 457-511.
- [Dm-2] ———, *Champs magnétiques et intégralités de Morse pour la d'' -cohomologie*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **35** (1985), 189-229.
- [Dm-3] ———, *Analytic methods in algebraic geometry*, Surveys of Modern Mathematics, 1 International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012. viii+231 pp.
- [F] Fujiki, A., *On the blowing down of analytic spaces*, Publ. RIMS. **10** (1975), 473-507.
- [F-N] Fujiki, A. and Nakano, S., *Supplement to "On the inverse of monoidal transformation"*, Publ. RIMS. **7** (1971), 637-644.
- [G-1] Grauert, H., *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik*, Math. Ann. **131** (1956), 38-75.
- [G-2] ———, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. Math. **68** (1958), 460-472.
- [G-3] ———, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. **146** (1962), 331-368.
- [G-4] ———, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. **81** (1963), 377-391.
- [G-R-1] Grauert, H. and Riemenschneider, O., *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Inventiones Mathematicae, **11** (1970), 263-292.
- [G-R-2] ———, *Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper- q -konvexem Rand*, Problems in Analysis. A Symposium in Honor of Salomon Bochner, pp. 61-79. Princeton: Princeton University Press 1970

- [G-P-R] Grauert, H., Peternell, T. and Remmert, R., *Several Complex Variables VII*, encyclopedia of mathematical sciences, Vol 74. Springer 1994
- [G-Z] Guan, Q.-A. and Zhou, X.-Y., *A solution of an L^2 extension problem with optimal estimate and applications*, Ann. Math. 181 (2015), 1139-1208.
- [Hr] Hironaka, H., *Flattening theorems in complex-analytic geometry*, American Journal of Mathematics Vol. 97, No. 2 (1975), 503-547 .
- [H] Hodge, W. V. D. , *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge University Press, 1941.
- [Hö-1] Hörmander, L., *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. 113 (1965), 89-152.
- [Hö-2] —, *An Introduction to Complex Analysis in Several Complex Variables*, Third Edition, North-Holland Mathematical Library 1990.
- [J-P] Jarnicki, M. and Pflug, P., *Extension of Holomorphic Functions*, Volume 34 De Gruyter Expositions in Mathematics, 2020. De Gruyter.
- [K-1] Kodaira, K., *Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential the ory)*, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 587-665.
- [K-2] —, *On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953), 865-868.
- [K-3] —, *On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Math. (2) 60 (1954), 28-48.
- [Kn-1] Kohn, J. J., *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I*, Annals of Math. Vol. 78, No. 1 (Jul., 1963), pp. 112-148.
- [Kn-2] —, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, II*, Annals of Math. Vol. 79, No. 3 (May, 1964), pp. 450-472.
- [N-1] Nakano, S., *On the inverse of monoidal transformation*, Publ. RIMS 6 (1970/1971), 483-501.
- [N-2] —, *Vanishing Theorems for Weakly 1-Complete Manifolds, II*, Publ. RIMS. 10 (1974), 101-110.
- [N-R] Nakano, S. and Rhai, T.-S., *Vector bundle version of Ohsawa's finiteness theorems*, Math. Japonica 24 (1979-80) 657-664.
- [Oh-1] Ohsawa, T., *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15 (1979), no. 3, 853-870.
- [Oh-2] —, *On complete Kähler domains with C^1 boundary*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 16 (1980), 929-940.
- [Oh-3] —, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 21-38.
- [Oh-4] —, *Bundle convexity and kernel asymptotics on a class of locally pseudoconvex domains*, The Bergman kernel and related topics, ed. K. Hirachi et al. Hayama Symp. on SCV XXIII, Kanagawa, Japan, July 2022. Springer Proceedings in Math. & Stat. pp. 293-304. (2024)
- [Oh-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197-204.
- [O-1] Oka, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IV. Domaines pseudo convexes*, Tohoku Math. J. 49 (1942), 15-52.
- [O-2] —, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur*, Jap. J. of Math. 23 (1953), 97-155.
- [S] Siu, Y.-T., *Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semipositive case*, survey article in the Proceedings of the

- Math. Arrbeitstagung held in Bonn (june 1984), Max Planck Inst. für Math. LNM 1111, Springer-Verlag.
- [Sk] Skoda, H., *Application des techniques à la théorie des idéaux d'une alg'èbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4(5) (1972), 545-579.
- [T-1] Takayama, S., *Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds. I. Global projective embedding*, Math. Ann. 311 (1998), no. 3, 501-531.
- [T-2] —, *The Levi problem and the structure theorem for non-negatively curved complete Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. 504 (1998), 139-157.
- [V] Vesentini, E., *Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta*, Nota I et II, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Natur. (8) XXIV (1958), 505-512; *ibid.* XXIV (1957), 232-241.

TAKEO OHSAWA, GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS NAGOYA UNIVERSITY
464-8602 CHIKUSAKU FUROCHO NAGOYA JAPAN
Email address: ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp