リッチ曲率と構造定数の不変式
—３次元の場合を中心に—

阿賀岡 芳夫 (広島大学)

2025年**3**月**26**日

agaoka@hiroshima-u.ac.jp

大 目 標： 曲率テンソル場 R^i_{jkl} の特徴付け

(まず局所的に, 次に大域的に)

中 目 標： それらのリッチ曲率版 R_{ij} を考えよう

小 目 標： リー群上での左不変版を考えよう

$\Longrightarrow$

今日の話は, 小目標の3次元版

(最終目標: 大目標の大域版 $\Rightarrow$ 多様体の不変量へ)

Prescribed curvature problem

リーマン計量 $g_{ij} \Longrightarrow$ レビ・チビタ接続 $\nabla \Longrightarrow$ 曲率 R^i_{jkl}

曲率 R^i_{jkl} の性質

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$$

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \quad \text{(第一ビアンキの恒等式)}$$

$$\nabla_m R^i_{jkl} + \nabla_k R^i_{jlm} + \nabla_l R^i_{jmk} = 0$$

(第二ビアンキの恒等式)

では$\underline{\underline{\text{逆に}}}$, これらの性質を満たすテンソル場$R^{i}_{\ jkl}$が与えられていたら, それはあるリーマン計量の定める曲率テンソル場になっているか?

$\Longrightarrow$

答は, 一般に「No」!!

問題： どのような条件を満たすテンソル場なら,

計量の定める曲率テンソル場になるのか?

Known results

2次元では、

J.L.Kazdan, F.E.Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. **99** (1974)　等

低次元のときの必要条件については, 物理の人達の試み

論文は数多く出ているが, 決定打はまだ出ていない$\cdots$

(local, global, 低次元, 一般次元, それぞれについて)

今回は, この問題の<u>左不変</u>versionを考える

更に問題を限定して, <u>リッチ曲率</u>についてのprescribed Ricci curvature problemを考えることにする

更に問題を限定して, <u>3次元</u>の場合を考えることにする

リッチ曲率の局所版は, 既に決定打が得られている

D.M.DeTurck, Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: Local theory, Inv. Math. **65** (1981)

主結果

対称テンソルT_{ij}が非退化なら, 局所的にあるリーマン計量 g が存在して $\mathrm{Ric}_g = T$ となる　(次元≥ 3)

等質空間・リー群の場合, 事情はかなり異なる

($\Longrightarrow$ これについて, 次ページ以降で説明)

だが, 最近は $\mathrm{Ric}_g = cT$ となる計量 g と定数 $c > 0$ の存在に関する研究が多い

R.M.Arroyo, T.Buttsworth, M.D.Gould, A.M.Krishnan, J.Lauret, A.Pulemotov, C.E.Will, W.Ziller, $\cdots$

◎　今回は, もともとの $\mathrm{Ric}_g = T$ について考察する

<u>Formulation</u> (一般次元の多様体, 局所座標表示)

g_{ij} : $\underline{\underline{\text{擬}}}$リーマン計量, $\quad \sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$

Γ^i_{jk} : レビ・チビタ接続

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right), \ \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

R^i_{jkl} : 曲率

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x_l} + \sum_m (\Gamma^m_{lj} \Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^i_{lm})$$

R_{ij}： リッチ曲率

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}, \qquad R_{ij} = R_{ji}$$

重要な性質

計量を定数倍しても，レビ・チビタ接続は変わらない

従って，曲率，リッチ曲率も変わらない

しかし　$\varphi_x : S^2_{nd}(T^*_x M) \longrightarrow S^2(T^*_x M) \quad (x \in M)$

$$\varphi_x(g_{ij}) = R_{ij}$$

という写像が定まるわけではない!　(S^2_{nd}: 非退化)

何故なら，リッチ曲率 R_{ij} を計算するには計量 g_{ij} の 2 階微分までの情報が必要

ところが，リー群の左不変計量の場合は，上の写像が定まり，φ の像の余次元は 1 次元以上ある

$\Longrightarrow$ 像の定義方程式は，左不変計量のリッチ曲率が満たすべき恒等式を与える

リー群上の左不変計量の場合

擬リーマン計量 g から定まるレビ・チビタ接続 ∇:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)
\end{aligned}
$$

左不変ベクトル場からなる基底 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を使うと

$$
2\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \sum_l (c_{ij}^l g_{lk} + c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li})
$$

ただし, $\nabla_{X_i} X_j = \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l,\ \ [X_i, X_j] = \sum_l c_{ij}^l X_l$

両辺に g^{km} をかけて, k についても和をとる
(以下, アインシュタインの記法を使う)

$$2\Gamma_{ij}^{l} g_{lk} g^{km} = (c_{ij}^{l} g_{lk} + c_{ki}^{l} g_{lj} + c_{kj}^{l} g_{li}) g^{km}$$

$$\Longrightarrow$$

$$2\Gamma_{ij}^{l} \delta_{l}^{m} = c_{ij}^{l} \delta_{l}^{m} + (c_{ki}^{l} g_{lj} + c_{kj}^{l} g_{li}) g^{km} \quad \text{より}$$

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} c_{ij}^{m} + \frac{1}{2} (c_{ki}^{l} g_{lj} + c_{kj}^{l} g_{li}) g^{km}$$

今の場合, 一般に $\Gamma_{ij}^{m} \neq \Gamma_{ji}^{m}$ であることに注意する

曲率は

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{[X_i,X_j]}X_k$$

より　$R^l_{kij} = \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} - c^m_{ij}\Gamma^l_{mk}$

リッチ曲率は

$R_{ij} = R^k_{ikj} = \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{ki} - c^m_{kj}\Gamma^k_{mi}$

$\Longrightarrow$

$\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*)$　$\varphi_c(g) =$「リッチ曲率」

が定まる　($\mathfrak{g}$ はリー群のリー代数, g は左不変計量)

φ_c はリー代数の構造定数 c^i_{jk} に依存する写像

改めて, 計量 g を定数倍しても, Γ^i_{jk} は不変

曲率, リッチ曲率も不変だから

$$\varphi_c(kg) = \varphi_c(g) \quad (k \neq 0)$$

従って, $\mathrm{Im}\,\varphi_c \subset S^2(\mathfrak{g}^*)$ の余次元は 1 次元以上ある

$\Longrightarrow$ 像の定義方程式は, 左不変計量のリッチ曲率が満たすべき恒等式を与える

$\Longrightarrow$ これが求まれば, prescribed Ricci curvature problem が部分的に解けたことになる!

$\varphi_c : (g_{ij}) \mapsto (R_{kl})$　は (c_{qr}^p) に依存した写像

つまり

$$R_{kl} = \text{「}\, g_{ij} \text{ と } c_{qr}^p \text{ 達の関数」}$$

この $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の等式から g_{ij} 達を消去して,

R_{kl} と c_{qr}^p の関係式(=恒等式)を導き出せば, それが

φ_c の像の定義方程式になる

($\mathrm{Im}\,\varphi_c \subset S^2(\mathfrak{g}^*)$ は余次元1以上あることが分かって

いるから, このような関係式は必ず存在する!)

しかし, φ_c は複雑な写像　(逆行列 g^{km} が現れるため)

$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}c_{ij}^m + \frac{1}{2}(c_{ki}^l g_{lj} + c_{kj}^l g_{li})g^{km}$ を

$R_{ij} = R_{ikj}^k = \Gamma_{km}^k \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ki}^m - c_{kj}^m \Gamma_{mi}^k$ に代入

$$g^{km} = \frac{g_{ij}\text{ の } n-1\text{ 次式}}{|g|}, \quad |g| = \det(g_{ij})$$

一般に, φ_c の像の「定義方程式」は捉え難い!!

($\because$ この式から g_{ij} を消去して, R_{kl} と c_{qr}^p の式を求めるのだが, 消去する変数の個数が多くて, かつ式の次数が高い)

2次元のときは簡単

$[X_1, X_2] = c^1_{12}\, X_1 + c^2_{12}\, X_2$ とおくと

$$R^i_{\ jkl} = k\,(\delta^i_k\, g_{jl} - \delta^i_l\, g_{jk})$$

ただし, $k = -\dfrac{1}{|g|}\{(c^1_{12})^2 g_{11} + 2\, c^1_{12} c^2_{12}\, g_{12} + (c^2_{12})^2 g_{22}\}$

となり, リッチ曲率 $R_{ij} = k\, g_{ij}$ は恒等式

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{vmatrix} + \{(c^1_{12})^2 R_{11} + 2\, c^1_{12} c^2_{12}\, R_{12} + (c^2_{12})^2 R_{22}\} = 0$$

を満たす. しかし, 3次元以上ではこう簡単にはゆかない

ちょっと，コメント

$$\Gamma_{ij}^{m} = \tfrac{1}{2}c_{ij}^{m} + \tfrac{1}{2}(c_{ki}^{l}g_{lj} + c_{kj}^{l}g_{li})g^{km}$$

$$= \frac{c\,\text{と}\,g\,\text{の式}}{|g|} \quad \text{だから}$$

$$R_{kij}^{l} = \Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m} - c_{ij}^{m}\Gamma_{mk}^{l}$$

$$= \frac{c\,\text{と}\,g\,\text{の式}}{|g|^2} \quad \text{のかたちにはるはず!}$$

$\Longrightarrow$

実は，分子が $|g|$ でくくれるので，分母分子の $|g|$ が1個消せて，分母は $|g|$ になる

3次元のときのリッチ曲率

$$R_{11}=\frac{1}{2|g|}\{g_{11}^3(c_{23}^1)^2+2g_{11}^2g_{12}c_{23}^1(-c_{13}^1+c_{23}^2)+2g_{11}^2g_{13}$$

$$c_{23}^1(c_{12}^1+c_{23}^3)-2g_{11}^2g_{22}c_{13}^1(c_{13}^1+c_{23}^2)+2g_{11}^2g_{33}c_{12}^1(-c_{12}^1$$

$$+c_{23}^3)+2g_{11}^2g_{23}(2c_{12}^1c_{13}^1+c_{12}^1c_{23}^2-c_{13}^1c_{23}^3)+g_{11}g_{12}^2$$

$$(3(c_{13}^1)^2-2c_{23}^1c_{13}^2+(c_{23}^2)^2)+2g_{11}g_{12}g_{13}(-3c_{12}^1c_{13}^1+c_{23}^1c_{12}^2$$

$$-c_{23}^1c_{13}^3+c_{23}^2c_{23}^3)-2g_{11}g_{12}g_{22}c_{13}^2(c_{13}^1+c_{23}^2)+2g_{11}g_{12}g_{33}$$

$$(-2c_{12}^1c_{12}^2-c_{12}^1c_{13}^3+c_{12}^2c_{23}^3)+2g_{11}g_{12}g_{23}(c_{12}^1c_{13}^2+2c_{13}^1c_{12}^2$$

$$+c_{13}^1c_{13}^3+c_{12}^2c_{23}^2-c_{13}^2c_{23}^3)+g_{11}g_{13}^2((3c_{12}^1)^2+2c_{23}^1c_{12}^3$$

$$+(c_{23}^3)^2)+2g_{11}g_{13}g_{22}(-c_{13}^1c_{12}^2-2c_{13}^1c_{13}^3-c_{23}^2c_{13}^3)$$

$$+ 2g_{11}g_{13}g_{33}c^3_{12}(-c^1_{12} + c^3_{23}) + 2g_{11}g_{13}g_{23}(c^1_{12}c^2_{12} + 2c^1_{12}c^3_{13}$$

$$+ c^1_{13}c^3_{12} + c^2_{23}c^3_{12} - c^3_{13}c^3_{23}) - g_{11}g^2_{22}(c^2_{13})^2 - 2g_{11}g_{22}g_{33}$$

$$((c^2_{12})^2 + c^2_{13}c^3_{12} + (c^3_{13})^2) + 2g_{11}g_{22}g_{23}c^2_{13}(c^2_{12} - c^3_{13})$$

$$- g_{11}g^2_{33}(c^3_{12})^2 + 2g_{11}g_{23}g_{33}c^3_{12}(-c^2_{12} + c^3_{13}) + g_{11}g^2_{23}$$

$$((c^2_{12})^2 + 2c^2_{12}c^3_{13} + 4c^2_{13}c^3_{12} + (c^3_{13})^2) + 4g^3_{12}c^1_{13}c^2_{13}$$

$$+ 4g^2_{12}g_{13}(-c^1_{12}c^2_{13} - c^1_{13}c^2_{12} + c^1_{13}c^3_{13}) + 2g^2_{12}g_{22}(c^2_{13})^2$$

$$+ 2g^2_{12}g_{33}(-c^2_{12}c^3_{13} + c^2_{13}c^3_{12} + (c^3_{13})^2) + 4g^2_{12}g_{23}c^2_{13}c^3_{13}$$

$$+ 4g_{12}g^2_{13}(c^1_{12}c^2_{12} - c^1_{12}c^3_{13} - c^1_{13}c^3_{12}) - 4g_{12}g_{13}g_{22}c^2_{12}c^2_{13}$$

$$- 4g_{12}g_{13}g_{33}c^3_{12}c^3_{13} - 8g_{12}g_{13}g_{23}c^2_{13}c^3_{12} + 4g^3_{13}c^1_{12}c^3_{12}$$

$$+ 2g^2_{13}g_{22}((c^2_{12})^2 - c^2_{12}c^3_{13} + c^2_{13}c^3_{12}) + 2g^2_{13}g_{33}(c^3_{12})^2$$

$$+ 4g^2_{13}g_{23}c^2_{12}c^3_{12}\}$$

3次元のとき，リッチ曲率は

$$R_{ij} = \frac{c\ \text{の}\, 2\, \text{次式} \times g\ \text{の}\, 3\, \text{次式}}{|g|}$$

のかたちになる．分母は $|g|^2$ ではなくて $|g|$.

6個の R_{ij} の長い式から6個の g_{ij} を消去して，R_{ij} と c^p_{qr} の関係式を導くことが目標となる

$\Longrightarrow$　途方に暮れるではないか!　そこで，$\cdots$

「群作用」を利用して, 定義方程式をつかまえよう!

群 $GL(n,\mathbf{R})$ が $\mathfrak{g}$ (n次元リー代数)に作用している

$\Longrightarrow$

g_{ij}, $R_{kl} \in S^2(\mathfrak{g}^*)$ や $c^p_{qr} \in \wedge^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ にも $GL(n,\mathbf{R})$ は自然に作用する

従って, 多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}]$, $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ にも$GL(n,\mathbf{R})$ は作用している

更に, φ_c は$GL(n,\mathbf{R})$-同変写像

i.e., $\quad \varphi_{A\cdot c}(A\cdot g) = A\cdot\varphi_c(g) \qquad (A \in GL(n,\mathbf{R}))$

3次元$(n=3)$の場合に，多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式をいくつか求めてみる

ただし，

$f \in \mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ が $GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式

$\Longleftrightarrow A\cdot f = |A|^k f \quad ({}^{\exists}k \in \mathbf{Z},\ {}^{\forall}A \in GL(3,\mathbf{R}))$

相対不変式　1

$$c = \begin{pmatrix} c^1_{23} & c^2_{23} & c^3_{23} \\ c^1_{31} & c^2_{31} & c^3_{31} \\ c^1_{12} & c^2_{12} & c^3_{12} \end{pmatrix}, \qquad |c| = \det c$$

$A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して

$$A \cdot c = \begin{pmatrix} (Ac)^1_{23} & (Ac)^2_{23} & (Ac)^3_{23} \\ (Ac)^1_{31} & (Ac)^2_{31} & (Ac)^3_{31} \\ (Ac)^1_{12} & (Ac)^2_{12} & (Ac)^3_{12} \end{pmatrix}$$ となる

ここに, $(Ac)^1_{23} = A\,[A^{-1}X_2, A^{-1}X_3]$ の X_1 成分

$$\Longrightarrow \qquad |A \cdot c| = |A|^{-1}|c|$$

相対不変式　2

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \qquad |g| = \det g$$

$A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して

$$A \cdot g = \begin{pmatrix} (Ag)_{11} & (Ag)_{12} & (Ag)_{13} \\ (Ag)_{12} & (Ag)_{22} & (Ag)_{23} \\ (Ag)_{13} & (Ag)_{23} & (Ag)_{33} \end{pmatrix}$$ となる

ここに, $(Ag)_{11} = g(A^{-1}X_1, A^{-1}X_1)$

$$\Longrightarrow \qquad |A \cdot g| = |A|^{-2}|g|$$

相対不変式　3

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} = &\ \underset{ijk}{\mathfrak{S}} \sum_{\alpha} c^{\alpha}_{ij}\, g_{\alpha k} \\
&= c^{1}_{23} g_{11} + c^{2}_{31} g_{22} + c^{3}_{12} g_{33} + (c^{1}_{31} + c^{2}_{23}) g_{12} \\
&\qquad + (c^{2}_{12} + c^{3}_{31}) g_{23} + (c^{3}_{23} + c^{1}_{12}) g_{31} \\
&= \mathrm{Tr}\,(c\, g)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad A \cdot I_{1,1} = |A|^{-1} I_{1,1}
$$

相対不変式　4

$$I_{2,2} = -\tfrac{1}{4} \sum \varepsilon(i_1, i_2, i_3)\varepsilon(j_1, j_2, j_3)\, c^{\alpha}_{i_1 i_2} c^{\beta}_{i_3 j_1} g_{\alpha j_2} g_{\beta j_3}$$

$$\begin{aligned}
&= (c^1_{13}c^2_{23} - c^1_{23}c^2_{13})(g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2) + (c^1_{23}c^3_{12} \\
&\quad -c^1_{12}c^3_{23})(g_{11}g_{33} - {g_{13}}^2) + (c^2_{12}c^3_{13} - c^2_{13}c^3_{12}) \\
&\quad (g_{22}g_{33} - {g_{23}}^2) + (c^1_{23}c^2_{12} - c^1_{12}c^2_{23} + c^1_{13}c^3_{23} \\
&\quad -c^1_{23}c^3_{13})(g_{11}g_{23} - g_{12}g_{13}) + (c^1_{13}c^2_{12} - c^1_{12}c^2_{13} \\
&\quad +c^2_{23}c^3_{13} - c^2_{13}c^3_{23})(g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23}) + (c^1_{12}c^3_{13} \\
&\quad -c^1_{13}c^3_{12} + c^2_{23}c^3_{12} - c^2_{12}c^3_{23})(g_{12}g_{33} - g_{13}g_{23})
\end{aligned}$$

$$= |\,c\,g|\,\mathrm{Tr}\,(c\,g)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A \cdot I_{2,2} = |A|^{-2} I_{2,2}$$

多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の相対不変式がこれらで生成されるわけではない

(ただし, $\mathbf{R}[\,g_{ij}]$ の相対不変式は $|g|$ のべき乗で尽くされることはよく知られている)

今は, この4個があれば十分

ここで, 次に多項式環 $\mathbf{R}[\,\underline{R_{ij}}, c^p_{qr}]$ を考えよう

g_{ij} も R_{ij} も共に対称な2次共変テンソルだから
$GL(3,\mathbf{R})$-相対不変式は, 全く同じ構造をしている

相対不変式 $2'$ ： $$|\,\mathrm{Ric}\,| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}$$

相対不変式 $3'$ ： $$K_{1,1} = \mathrm{Tr}\,(c\,\mathrm{Ric})$$

相対不変式 $4'$ ： $$K_{2,2} = |\,c\,\mathrm{Ric}\,|\,\mathrm{Tr}\,(c\,\mathrm{Ric})^{-1}$$

この3つの相対不変式 $|\mathrm{Ric}|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ の $\mathrm{Ric} = (R_{ij})$ のところに $\varphi_c(g)$ を代入する

$\Longrightarrow$

φ_c は $GL(3, \mathbf{R})$-同変だから, 代入後の式は $GL(3, \mathbf{R})$-相対不変になる　(ただし, 有理式になる)

$\because$ $f(\mathrm{Ric}, c)$ を相対不変式, $A \in GL(3, \mathbf{R})$ に対して $A \cdot f = |A|^k f$ を満たとする. $F(g, c)$ を $F(g, c) = f(\varphi_c(g), c)$ で定義すると

$(A \cdot F)(g, c) = F(A^{-1}g, A^{-1}c) = f(\varphi_{A^{-1}c}(A^{-1}g), A^{-1}c)$

$= f(A^{-1}\varphi_c(g), A^{-1}c) = (A \cdot f)(\varphi_c(g), c) = (|A|^k f)(\varphi_c(g), c)$

$= |A|^k (f(\varphi_c(g), c)) = |A|^k F(g, c)$　より, $A \cdot F = |A|^k F$

$\Longrightarrow$

ということは, 代入した後の $f(\varphi_c(g), c)$ は $\mathbf{R}[\, g_{ij}, c^p_{qr}]$ の相対不変式 $|c|$, $|g|$, $I_{1,1}$, $I_{2,2}$ を用いて表示できる可能性がある　(ただし, $f = |\,\mathrm{Ric}\,|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$)

- 実際の計算はとんでもなく大変
  計算機を使って実行する

- リー代数の型によって, 結果が異なる!

一口に代入すると言っても，実際の計算はとんでもなく大変!

例えば $|\,\mathrm{Ric}\,| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}$ の場合だと，ここに

$$R_{11} = \frac{1}{2|g|}\{g^3_{11}(c^1_{23})^2 + 2g^2_{11}g_{12}c^1_{23}(-c^1_{13} + c^2_{23}) + \cdots$$

等を代入すると，$\dfrac{c\text{ の }6\text{ 次式} \times g\text{ の }9\text{ 次式}}{|g|^3}$ のかたちになる

$\Longrightarrow$ 分子が $\quad |c|^2|g|^3,\ \ |c||g|^2{I_{1,1}}^3,\ \ |c||g|^2 I_{1,1}I_{2,2},$

$|g|{I_{1,1}}^6,\ \ |g|{I_{1,1}}^4 I_{2,2},\ \ |g|{I_{1,1}}^2{I_{2,2}}^2,\ \ |g|{I_{2,2}}^3$

の一次結合に表せるかどうか確かめる $\Longrightarrow$ 表せた!

まず, unimodular の場合

$$|\operatorname{Ric}| = \frac{1}{8|g|^2}\left({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 8\,|c||g|\right)^2$$

$$K_{1,1} = \frac{1}{2|g|}\left({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 12\,|c||g|\right)$$

$$K_{2,2} = -\frac{1}{4|g|^2}\left({I_{1,1}}^3 - 4\,I_{1,1}I_{2,2} + 8\,|c||g|\right) \times \left(I_{1,1}I_{2,2} - 6\,|c||g|\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 2\,|\operatorname{Ric}| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2$$

という恒等式が得られる!

$$
|\,\mathrm{Ric}\,| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{1,1} = c^1_{23}R_{11} + c^2_{31}R_{22} + c^3_{12}R_{33} + (c^1_{31} + c^2_{23})R_{12} \\
+(c^2_{12} + c^3_{31})R_{23} + (c^3_{23} + c^1_{12})R_{31}
\end{aligned}
$$

で，恒等式　$2\,|\,\mathrm{Ric}\,| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2$　が全ての計量に対して成り立つ　(擬リーマン計量も含む)

$\Longrightarrow$ もしリッチ平坦な計量が存在するなら $|c| = 0$

$\Longleftrightarrow$ $|c| \neq 0$ なら，リッチ平坦な計量は存在しない

$$|c| = \begin{vmatrix} c^1_{23} & c^2_{23} & c^3_{23} \\ c^1_{31} & c^2_{31} & c^3_{31} \\ c^1_{12} & c^2_{12} & c^3_{12} \end{vmatrix}$$

だから, $\quad |c| = 0 \iff \dim\,[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$

従って, 「$\mathfrak{o}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ 上にはリッチ平坦な計量は存在しない」ことが即座に分かる

◎ 同じようなことが, 高次元で出来たら面白い!!

次に, solvable の場合

結果を述べるために, 少し準備が必要

$\mathfrak{g}$ を<u>nilpotentでない</u>3次元リー代数とする

X を $\mathfrak{g}$ のgenericな元とし, $\mathrm{ad}\,X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ の固有値を

0, ε_1, ε_2 とすると, $\dfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ は X のとり方に

よらずに定まる. この値を $\chi(\mathfrak{g})$ と表すことにする

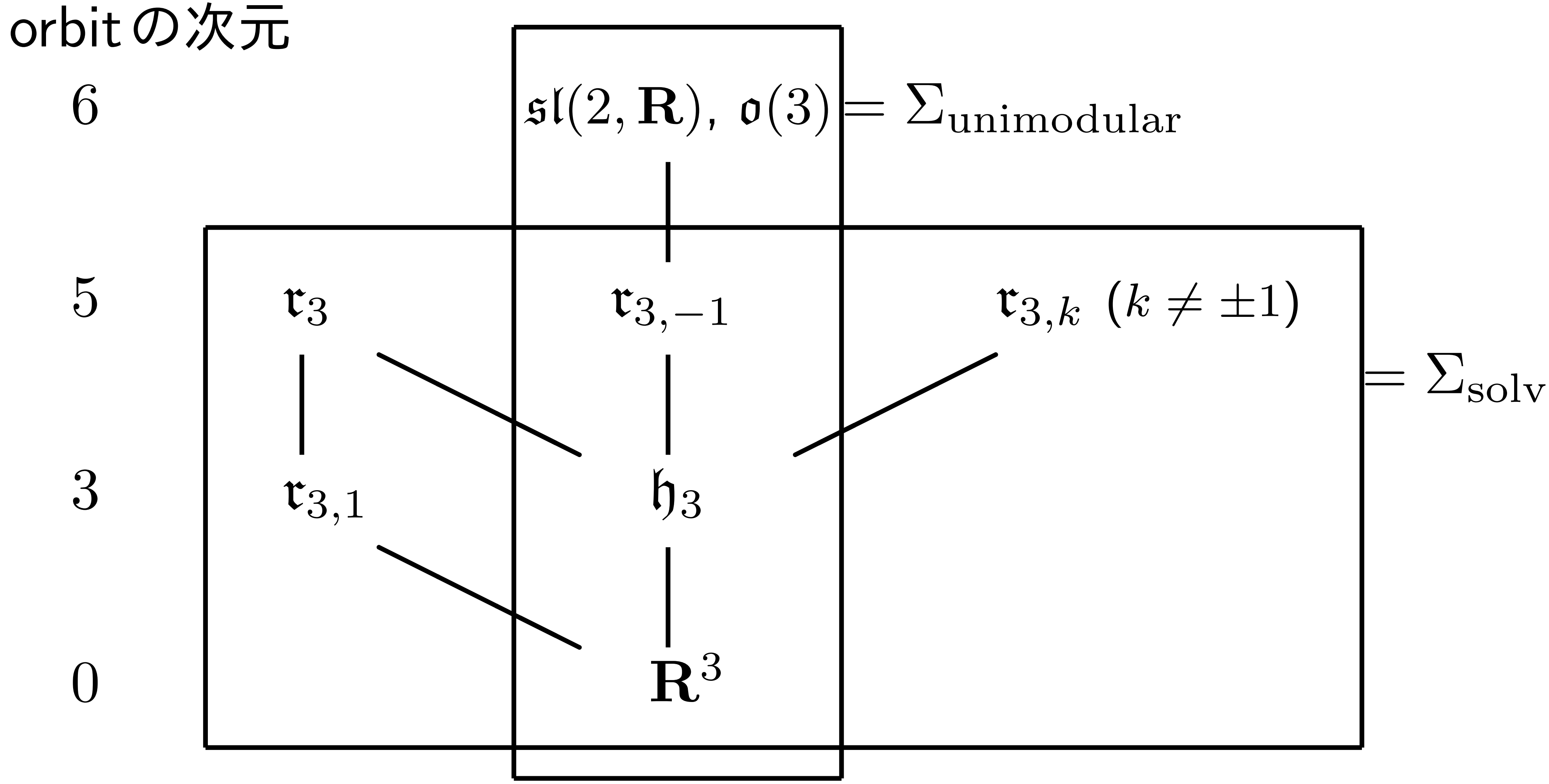
(ただし, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$ のときは $\chi(\mathfrak{g}) = \infty$ とおく)

(cf. Kirillov-Neretin, Tasaki-Umehara)

$\chi(\mathfrak{g})$ の値

		χ
$\mathbf{R}^3$		$-$
$\mathfrak{h}_3$	$[X_1, X_2] = X_3$	$-$
$\mathfrak{r}_3$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,\ [X_1, X_3] = X_3$	4
$\mathfrak{r}_{3,k}$	$[X_1, X_2] = X_2,\ [X_1, X_3] = kX_3 \quad (\lvert k\rvert \leq 1)$	$\frac{(k+1)^2}{k}$
$\mathfrak{r}'_{3,k}$	$[X_1, X_2] = kX_2 - X_3,$	
	$[X_1, X_3] = X_2 + kX_3 \quad (k \geq 0)$	$\frac{4k^2}{k^2+1}$
$\mathfrak{o}(3)$	$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1,$	
	$[X_3, X_1] = X_2$	0
$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$	$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1,$	
	$[X_3, X_1] = X_2$	0

3次元リー代数の模式図



k も $\chi(\mathfrak{g})$ も, 連続変形するリー代数の同型類を類別する量であるが,

k はリー代数の標準形のとり方に依存するパラメータ

$\chi(\mathfrak{g})$ は標準形のとり方, 基底のとり方に依存しない, リー代数の同型類により定まる不変量

(注)： $\chi(\mathfrak{g})$ の値が等しいリー代数は同型になる
というわけではない

$\varphi_c(g)$ を $|\,\mathrm{Ric}\,|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{Ric}\,| = \frac{1}{8|g|^2}\,&\{{I_{1,1}}^2 + 2\,(\chi-2)\,I_{2,2}\} \\
&\times\{{I_{1,1}}^4 + 2\,(\chi-2)\,{I_{1,1}}^2 I_{2,2} - 4\,\chi\,{I_{2,2}}^2\}
\end{aligned}
$$

$$
K_{1,1} = \frac{1}{2|g|}\,I_{1,1}({I_{1,1}}^2 - 4\,I_{2,2})
$$

$$
K_{2,2} = -\frac{1}{4|g|^2}\,I_{2,2}\{{I_{1,1}}^4 + 2\,(\chi-2)\,{I_{1,1}}^2 I_{2,2} - 4\,\chi\,{I_{2,2}}^2\}
$$

$\Longrightarrow$ solvableのとき

$$2\,\{|\,\mathrm{Ric}\,| + (\chi - 2)K_{2,2}\}\,(|\,\mathrm{Ric}\,| + \chi\,K_{2,2})^2$$

$$= K_{1,1}{}^2\,\{|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + (\chi - 2)|\,\mathrm{Ric}\,|K_{2,2} - \chi\,K_{2,2}{}^2\}$$

という恒等式が得られる! (これは R_{ij} の9次式)

ただし, $\mathbf{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$(nilpotent), $\mathfrak{r}_{3,0}(\chi = \infty)$ を除く

solvable かつ unimodular のときは, $\chi = 0$ なので

$$2|\operatorname{Ric}|^2(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}) = {K_{1,1}}^2|\operatorname{Ric}|(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}),$$

つまり

$$|\operatorname{Ric}|(2|\operatorname{Ric}| - {K_{1,1}}^2)(|\operatorname{Ric}| - 2\,K_{2,2}) = 0$$

となる. これはunimodularのときの恒等式

$$2\,|\operatorname{Ric}| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2$$

において$|c| = 0$とした $\underline{2\,|\operatorname{Ric}| = {K_{1,1}}^2}$ から導かれる

(3次元のときは

$$\mathfrak{g} \text{ が solvable} \iff \dim\,[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2 \iff |c| = 0)$$

$\mathbf{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$ (nilpotent), $\mathfrak{r}_{3,0}$ $(\chi = \infty)$ の場合

- $\mathbf{R}^3$ ： 左不変計量は, すべてリッチ平坦
- $\mathfrak{h}_3$ ： $2\,|\,\mathrm{Ric}\,| = {K_{1,1}}^2$ (と $K_{2,2} = 0$)
- $\mathfrak{r}_{3,0}$ ： $(K_{2,2} = 0)$

$\mathfrak{h}_3$ と $\mathfrak{r}_{3,0}$ の場合, $K_{2,2}$ の係数はすべて 0 になるので,
これはリッチ曲率の恒等式ではなく, 自明な式

$\varphi_c : S^2_{nd}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}^*)$ の微分の階数について

	$\mathrm{rank}\,(\varphi_c)_{*_g}$
$\mathbf{R}^3$	0
$\mathfrak{h}_3$	5
$\mathfrak{r}_3$	5
$\mathfrak{r}_{3,k}$	5
$\mathfrak{r}'_{3,k}$	5
$\mathfrak{o}(3)$	5
$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$	5

$\mathfrak{r}_{3,0}$ $(\chi = \infty)$ のときは, 特別扱いが必要

$\mathfrak{r}_{3,k}$ のときは

$$
\begin{aligned}
K_{2,2} &= (c^1_{13}c^2_{23} - c^1_{23}c^2_{13})(R_{11}R_{22} - {R_{12}}^2) + \cdots \\
&= k \times (R_{ij}\text{の}\,2\,\text{次式})
\end{aligned}
$$

と k でくくれる. (だから, $k=0$ のとき $K_{2,2}=0$)

$\Longrightarrow K_{2,2} = k \times \overline{K}_{2,2}$ とおくと, $\mathfrak{r}_{3,0}$ のときの恒等式は

$$2\,(|\,\mathrm{Ric}\,| + \overline{K}_{2,2})^2 = {K_{1,1}}^2\,|\,\mathrm{Ric}\,| \quad \text{となる}$$

$\mathfrak{r}_{3,1}$ でも特別なことが起こっている

- $\mathfrak{r}_{3,1}$ ： $|\,\mathrm{Ric}\,| + 2\,K_{2,2} = 0$ (と $K_{1,1} = 0$： 自明な式)

solvable のときの恒等式に $\chi = 2$ を代入すると

$$2\,|\,\mathrm{Ric}\,|(|\,\mathrm{Ric}\,| + 2\,K_{2,2})^2 = {K_{1,1}}^2(|\,\mathrm{Ric}\,|^2 - 2{K_{2,2}}^2) \\ = 0$$

一般に，リー代数が退化すると，リッチ曲率も退化して 0 に近づく．リッチ曲率の恒等式も退化して，多項式としての次数は低くなる．

実は，いつでも定曲率で $R^i_{jkl} = -\dfrac{I_{2,2}}{|g|}\,(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk})$

unimodular と solvable を比較

- unimodularのときの恒等式

$$2\,|\,\mathrm{Ric}\,| = (K_{1,1} - 2\,|c|)^2$$

- solvableのときの恒等式

$$2\left\{|\,\mathrm{Ric}\,| + (\chi - 2)K_{2,2}\right\}(|\,\mathrm{Ric}\,| + \chi\,K_{2,2})^2$$
$$= {K_{1,1}}^2\left\{|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + (\chi - 2)|\,\mathrm{Ric}\,|K_{2,2} - \chi\,{K_{2,2}}^2\right\}$$

solvableのときは, 定数項($|c|$を含む項)が現れない

($|\,\mathrm{Ric}\,|$, $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ はいずれもR_{ij}の同次式)

つまり, リッチ平坦となるための obstruction がない

では, solvableならリッチ平坦な計量は存在するか?

$\Longrightarrow$ 答はNo!

例えば, リー代数　$\mathfrak{r}_{3,k}$ $(|k| \leq 1)$

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = kX_3$$

は $0 < |k| < 1$ のとき, リッチ平坦なリーマン計量もローレンツ計量ももたない (新地-A)

ところが$\cdots$

3次元 solvable なら, 曲率が $\underline{\text{ほとんど}0}$ になる
ローレンツ計量が常に存在する (新地-A)
(当然, リッチ曲率もほとんど0になる)

ただし,

「曲率がほとんど 0」

$\Longleftrightarrow$ 曲率が0に収束する計量の family が存在する

例えば, 先程のリー代数 $\mathfrak{r}_{3,k}\ (|k|\leq 1)$ において,

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & t & -1 \\ \frac{1}{t} & -1 & t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \ \ (\text{ただし}\, t \fallingdotseq 0)$$

という左不変ローレンツ計量を入れる

$$\Longrightarrow\ {}^{\forall}R^{i}_{jkl} = \frac{t \times (t\,\text{の}\,4\,\text{次式})}{(t+1)^2(t-2)} \quad \text{のかたちになる}$$

$\Longrightarrow\ t \to 0$ のとき曲率は 0 に収束する

(このとき, 計量は発散する)

だから, solvable のときにリッチ平坦となるための obstruction (定数項) が存在しないのは当然

ということで, unimodular と solvable を比べて,

- リッチ曲率の恒等式の違いが, 浮き彫りになった
- 代数的な性質が, 幾何学的な状況に影響を及ぼす

◎ 高次元の場合が気になる$\cdots$

ちょっと話を変えて，「ほとんど0」になる話

一般に，写像の「像」は閉集合にならないことがある．だから，像は0を含まないが，像の閉包は0を含むことがある．これが「ほとんど0」の正体．

簡単な例：
$$x = \frac{2t}{t^2+1}, \quad y = \frac{2}{t^2+1} \ \ (t \in \mathbf{R})$$

像は円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ から原点を除いた集合になる
($t \to \pm\infty$ のとき原点に近づく)

もう一つ, 変な(?)例

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$$

$f(x, y) > 0$ だが, $f(x, y) = 0$ にはならない
(これは簡単に分かる)
しかし, $f(x, y)$ の値はいくらでも 0 に近づけられる

$(\because\ x = t,\ y = \dfrac{1}{t}$ として, $t \to 0$ とすればよい$)$

4次元の場合

多項式環 $\mathbf{R}[\,g_{ij}, c^p_{qr}]$ の $GL(4, \mathbf{R})$-相対不変式が, 十分な個数見つかれば, 同じ方法で恒等式を求めることは可能

ただし4次元の場合は, リー代数の作る代数的集合は $\wedge^2(\mathbf{R}^*)^4 \otimes \mathbf{R}^4$ の中で$\underline{4\text{個}}$の既約成分に分かれる

(3次元の場合は, unimodular と solvable の$\underline{2\text{個}}$の既約成分に分かれていた. ちなみに, 5次元では7個, 6次元では17個に分かれる$\cdots$)

例えば, $\mathbf{R}[\, c^p_{qr}\,]$ の $GL(4,\mathbf{R})$-相対不変式について

- 多項式としての次数は, 必ず 4 の倍数になる
- 4 次の相対不変式は 2 個存在する

$\Longrightarrow$ ところが, それは大変長い式になる!

3 次元のときのように, この相対不変式がリッチ平坦計量が存在するための obstruction の働きをしてくれる可能性もあるので, 大切かもしれない式なのだが $\cdots$

例えばその一つは

$$
\begin{aligned}
&(c^1_{12})^2c^2_{13}c^2_{24} - (c^1_{12})^2c^2_{14}c^2_{23} + (c^1_{12})^2c^2_{34}c^3_{13} + (c^1_{12})^2c^2_{34}c^4_{14} \\
&-c^1_{12}c^1_{13}c^2_{12}c^2_{24} + c^1_{12}c^1_{13}c^2_{13}c^3_{24} - c^1_{12}c^1_{13}c^2_{14}c^3_{23} - c^1_{12}c^1_{13}c^2_{23} \\
&c^3_{14} - c^1_{12}c^1_{13}c^2_{24}c^4_{14} - c^1_{12}c^1_{13}c^2_{34}c^3_{12} + c^1_{12}c^1_{13}c^3_{13}c^3_{34} + c^1_{12}c^1_{13} \\
&c^3_{34}c^4_{14} + c^1_{12}c^1_{14}c^2_{12}c^2_{23} + c^1_{12}c^1_{14}c^2_{13}c^4_{24} - c^1_{12}c^1_{14}c^2_{14}c^4_{23} + c^1_{12} \\
&c^1_{14}c^2_{23}c^3_{13} + c^1_{12}c^1_{14}c^2_{24}c^4_{13} - c^1_{12}c^1_{14}c^2_{34}c^4_{12} + c^1_{12}c^1_{14}c^3_{13}c^4_{34} + \\
&c^1_{12}c^1_{14}c^4_{14}c^4_{34} + c^1_{12}c^1_{23}c^2_{12}c^2_{14} + c^1_{12}c^1_{23}c^2_{14}c^3_{13} + c^1_{12}c^1_{23}c^2_{14}c^4_{14} \\
&-c^1_{12}c^1_{24}c^2_{12}c^2_{13} - c^1_{12}c^1_{24}c^2_{13}c^3_{13} - c^1_{12}c^1_{24}c^2_{13}c^4_{14} - c^1_{12}c^1_{34}c^2_{12} \\
&c^3_{13} - c^1_{12}c^1_{34}c^2_{12}c^4_{14} - c^1_{12}c^1_{34}(c^3_{13})^2 - 2c^1_{12}c^1_{34}c^3_{13}c^4_{14} - c^1_{12}c^1_{34} \\
&(c^4_{14})^2 + c^1_{12}c^2_{12}c^2_{34}c^3_{23} + c^1_{12}c^2_{12}c^2_{34}c^4_{24} + c^1_{12}c^2_{13}c^2_{23}c^3_{24} - 2c^1_{12}
\end{aligned}
$$

$$c_{13}^{2}c_{24}^{2}c_{23}^{3} - c_{12}^{1}c_{13}^{2}c_{24}^{2}c_{24}^{4} - c_{12}^{1}c_{13}^{2}c_{24}^{3}c_{34}^{4} + c_{12}^{1}c_{13}^{2}c_{34}^{3}c_{24}^{4}+$$
$$c_{12}^{1}c_{14}^{2}c_{23}^{2}c_{23}^{3} + 2c_{12}^{1}c_{14}^{2}c_{23}^{2}c_{24}^{4} - c_{12}^{1}c_{14}^{2}c_{24}^{2}c_{23}^{4} + c_{12}^{1}c_{14}^{2}c_{23}^{3}$$
$$c_{34}^{4} - c_{12}^{1}c_{14}^{2}c_{34}^{3}c_{23}^{4} - c_{12}^{1}(c_{23}^{2})^{2}c_{14}^{3} + c_{12}^{1}c_{23}^{2}c_{24}^{2}c_{13}^{3} - c_{12}^{1}c_{23}^{2}$$
$$c_{24}^{2}c_{14}^{4} - c_{12}^{1}c_{23}^{2}c_{34}^{2}c_{12}^{3} + c_{12}^{1}c_{23}^{2}c_{13}^{3}c_{34}^{3} + c_{12}^{1}c_{23}^{2}c_{14}^{3}c_{34}^{4} + c_{12}^{1}$$
$$(c_{24}^{2})^{2}c_{13}^{4} - c_{12}^{1}c_{24}^{2}c_{34}^{2}c_{12}^{4} + c_{12}^{1}c_{24}^{2}c_{34}^{3}c_{13}^{4} + c_{12}^{1}c_{24}^{2}c_{14}^{4}c_{34}^{4}+$$
$$c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{12}^{3}c_{34}^{4} - c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{13}^{3}c_{23}^{3} - c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{13}^{3}c_{24}^{4} - c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{23}^{3}c_{14}^{4}$$
$$-c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{34}^{3}c_{12}^{4} - c_{12}^{1}c_{34}^{2}c_{14}^{4}c_{24}^{4} - (c_{13}^{1})^{2}c_{12}^{2}c_{24}^{3} - (c_{13}^{1})^{2}c_{12}^{3}$$
$$c_{34}^{3} - (c_{13}^{1})^{2}c_{14}^{3}c_{23}^{3} - (c_{13}^{1})^{2}c_{24}^{3}c_{14}^{4} + c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{12}^{2}c_{23}^{3} - c_{13}^{1}c_{14}^{1}$$
$$c_{12}^{2}c_{24}^{4} - c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{12}^{3}c_{34}^{4} + c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{13}^{3}c_{23}^{3} - c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{14}^{3}c_{23}^{4} + c_{13}^{1}$$
$$c_{14}^{1}c_{24}^{3}c_{13}^{4} - c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{34}^{3}c_{12}^{4} - c_{13}^{1}c_{14}^{1}c_{14}^{4}c_{24}^{4} + c_{13}^{1}c_{23}^{1}c_{12}^{2}c_{14}^{3}+$$
$$c_{13}^{1}c_{23}^{1}c_{13}^{3}c_{14}^{3} + c_{13}^{1}c_{23}^{1}c_{14}^{3}c_{14}^{4} + c_{13}^{1}c_{24}^{1}(c_{12}^{2})^{2} + c_{13}^{1}c_{24}^{1}c_{12}^{2}c_{13}^{3}$$

$$+2c_{13}^1c_{24}^1c_{12}^2c_{14}^4 + c_{13}^1c_{24}^1c_{13}^3c_{14}^4 + c_{13}^1c_{24}^1(c_{14}^4)^2 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^2$$
$$c_{12}^3 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^3c_{13}^3 + c_{13}^1c_{34}^1c_{12}^3c_{14}^4 - c_{13}^1c_{12}^2c_{23}^2c_{24}^3 + c_{13}^1c_{12}^2$$
$$c_{24}^2c_{23}^3 + c_{13}^1c_{12}^2c_{23}^3c_{34}^3 + c_{13}^1c_{12}^2c_{24}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{13}^2c_{23}^3c_{24}^3 - c_{13}^1$$
$$c_{13}^2c_{24}^3c_{24}^4 + c_{13}^1c_{14}^2(c_{23}^3)^2 + c_{13}^1c_{14}^2c_{23}^3c_{24}^4 - 2c_{13}^1c_{23}^2c_{12}^3c_{34}^3$$
$$+c_{13}^1c_{23}^2c_{13}^3c_{24}^3 - c_{13}^1c_{23}^2c_{14}^3c_{23}^3 + c_{13}^1c_{23}^2c_{14}^3c_{24}^4 - c_{13}^1c_{23}^2c_{24}^3$$
$$c_{14}^4 - c_{13}^1c_{24}^2c_{12}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{24}^2c_{14}^3c_{23}^4 + c_{13}^1c_{24}^2c_{24}^3c_{13}^4 - c_{13}^1c_{24}^2$$
$$c_{34}^3c_{12}^4 + c_{13}^1c_{34}^2c_{12}^3c_{23}^3 + c_{13}^1c_{34}^2c_{12}^3c_{24}^4 + c_{13}^1c_{12}^3c_{34}^3c_{34}^4 - c_{13}^1$$
$$c_{13}^3c_{24}^3c_{34}^4 + 2c_{13}^1c_{14}^3c_{23}^3c_{34}^4 - c_{13}^1c_{14}^3c_{34}^3c_{23}^4 - c_{13}^1c_{23}^3c_{34}^3c_{14}^4 +$$
$$c_{13}^1c_{24}^3c_{34}^3c_{13}^4 + c_{13}^1c_{24}^3c_{14}^4c_{34}^4 - c_{13}^1(c_{34}^3)^2c_{12}^4 - c_{13}^1c_{34}^3c_{14}^4c_{24}^4$$
$$+(c_{14}^1)^2c_{12}^2c_{23}^4 + (c_{14}^1)^2c_{13}^3c_{23}^4 - (c_{14}^1)^2c_{12}^4c_{34}^4 + (c_{14}^1)^2c_{13}^4$$
$$c_{24}^4 - c_{14}^1c_{23}^1(c_{12}^2)^2 - 2c_{14}^1c_{23}^1c_{12}^2c_{13}^3 - c_{14}^1c_{23}^1c_{12}^2c_{14}^4 - c_{14}^1$$

$$c^1_{23}(c^3_{13})^2 - c^1_{14}c^1_{23}c^3_{13}c^4_{14} - c^1_{14}c^1_{24}c^2_{12}c^4_{13} - c^1_{14}c^1_{24}c^3_{13}c^4_{13}-$$
$$c^1_{14}c^1_{24}c^4_{13}c^4_{14} + c^1_{14}c^1_{34}c^2_{12}c^4_{12} + c^1_{14}c^1_{34}c^3_{13}c^4_{12} + c^1_{14}c^1_{34}c^4_{12}c^4_{14}$$
$$-c^1_{14}c^2_{12}c^2_{23}c^4_{24} + c^1_{14}c^2_{12}c^2_{24}c^4_{23} + c^1_{14}c^2_{12}c^3_{34}c^4_{23} + c^1_{14}c^2_{12}c^4_{24}$$
$$c^4_{34}-c^1_{14}c^2_{13}c^3_{23}c^4_{24}-c^1_{14}c^2_{13}(c^4_{24})^2+c^1_{14}c^2_{14}c^3_{23}c^4_{23}+c^1_{14}c^2_{14}c^4_{23}c^4_{24}$$
$$-c^1_{14}c^2_{23}c^3_{12}c^4_{34} - c^1_{14}c^2_{23}c^3_{14}c^4_{23} + c^1_{14}c^2_{23}c^3_{24}c^4_{13} - c^1_{14}c^2_{23}c^3_{34}$$
$$c^4_{12} + c^1_{14}c^2_{24}c^3_{13}c^4_{23} - c^1_{14}c^2_{24}c^3_{23}c^4_{13} - 2c^1_{14}c^2_{24}c^4_{12}c^4_{34} + c^1_{14}c^2_{24}$$
$$c^4_{13}c^4_{24} - c^1_{14}c^2_{24}c^4_{14}c^4_{23} + c^1_{14}c^2_{34}c^3_{23}c^4_{12} + c^1_{14}c^2_{34}c^4_{12}c^4_{24} + c^1_{14}$$
$$c^3_{12}(c^4_{34})^2 - c^1_{14}c^3_{13}c^3_{23}c^4_{34} + c^1_{14}c^3_{13}c^3_{34}c^4_{23} - c^1_{14}c^3_{13}c^4_{24}c^4_{34}+$$
$$c^1_{14}c^3_{14}c^4_{23}c^4_{34} - c^1_{14}c^3_{24}c^4_{13}c^4_{34} - c^1_{14}c^3_{34}c^4_{12}c^4_{34} + 2c^1_{14}c^3_{34}c^4_{13}$$
$$c^4_{24} - c^1_{14}c^3_{34}c^4_{14}c^4_{23} - c^1_{23}c^2_{12}c^2_{14}c^3_{23} - c^1_{23}c^2_{12}c^2_{14}c^4_{24} + c^1_{23}c^2_{12}$$
$$c^2_{23}c^3_{14} + c^1_{23}c^2_{12}c^2_{24}c^4_{14} - c^1_{23}c^2_{12}c^3_{14}c^4_{34} + c^1_{23}c^2_{12}c^3_{34}c^4_{14} - c^1_{23}$$

$$c^2_{14}c^3_{13}c^3_{23} - c^1_{23}c^2_{14}c^3_{13}c^4_{24} - c^1_{23}c^2_{14}c^3_{23}c^4_{14} - c^1_{23}c^2_{14}c^4_{14}c^4_{24}+$$

$$c^1_{23}c^2_{23}c^3_{13}c^3_{14} + c^1_{23}c^2_{23}c^3_{14}c^4_{14} + c^1_{23}c^2_{24}c^3_{13}c^4_{14} + c^1_{23}c^2_{24}(c^4_{14})^2$$

$$-c^1_{23}c^3_{13}c^3_{14}c^4_{34} + c^1_{23}c^3_{13}c^3_{34}c^4_{14} - c^1_{23}c^3_{14}c^4_{14}c^4_{34} + c^1_{23}c^3_{34}$$

$$(c^4_{14})^2 + c^1_{24}c^2_{12}c^2_{13}c^3_{23} + c^1_{24}c^2_{12}c^2_{13}c^4_{24} - c^1_{24}c^2_{12}c^2_{23}c^3_{13} - c^1_{24}$$

$$c^2_{12}c^2_{24}c^4_{13} + c^1_{24}c^2_{12}c^3_{13}c^4_{34} - c^1_{24}c^2_{12}c^3_{34}c^4_{13} + c^1_{24}c^2_{13}c^3_{13}c^3_{23}+$$

$$c^1_{24}c^2_{13}c^3_{13}c^4_{24} + c^1_{24}c^2_{13}c^3_{23}c^4_{14} + c^1_{24}c^2_{13}c^4_{14}c^4_{24} - c^1_{24}c^2_{23}(c^3_{13})^2$$

$$-c^1_{24}c^2_{23}c^3_{13}c^4_{14} - c^1_{24}c^2_{24}c^3_{13}c^4_{13} - c^1_{24}c^2_{24}c^4_{13}c^4_{14} + c^1_{24}(c^3_{13})^2$$

$$c^4_{34} - c^1_{24}c^3_{13}c^3_{34}c^4_{13} + c^1_{24}c^3_{13}c^4_{14}c^4_{34} - c^1_{24}c^3_{34}c^4_{13}c^4_{14} - c^1_{34}$$

$$(c^2_{12})^2c^3_{23} - c^1_{34}(c^2_{12})^2c^4_{24} + c^1_{34}c^2_{12}c^2_{23}c^3_{12} + c^1_{34}c^2_{12}c^2_{24}c^4_{12}-$$

$$c^1_{34}c^2_{12}c^3_{12}c^4_{34} - c^1_{34}c^2_{12}c^3_{13}c^3_{23} - c^1_{34}c^2_{12}c^3_{13}c^4_{24} - c^1_{34}c^2_{12}c^3_{23}c^4_{14}$$

$$+c^1_{34}c^2_{12}c^3_{34}c^4_{12} - c^1_{34}c^2_{12}c^4_{14}c^4_{24} + c^1_{34}c^2_{23}c^3_{12}c^3_{13} + c^1_{34}c^2_{23}c^3_{12}$$

$$c^4_{14} + c^1_{34}c^2_{24}c^3_{13}c^4_{12} + c^1_{34}c^2_{24}c^4_{12}c^4_{14} - c^1_{34}c^3_{12}c^3_{13}c^4_{34} - c^1_{34}c^3_{12}$$
$$c^4_{14}c^4_{34} + c^1_{34}c^3_{13}c^3_{34}c^4_{12} + c^1_{34}c^3_{34}c^4_{12}c^4_{14} + c^2_{12}c^2_{23}c^3_{23}c^3_{34} + c^2_{12}$$
$$c^2_{23}c^3_{34}c^4_{24} + c^2_{12}c^2_{24}c^3_{23}c^4_{34} + c^2_{12}c^2_{24}c^4_{24}c^4_{34} - c^2_{12}c^2_{34}(c^3_{23})^2 -$$
$$2c^2_{12}c^2_{34}c^3_{23}c^4_{24} - c^2_{12}c^2_{34}(c^4_{24})^2 - c^2_{13}c^2_{23}c^3_{23}c^3_{24} - c^2_{13}c^2_{23}c^3_{24}$$
$$c^4_{24} + c^2_{13}c^2_{24}(c^3_{23})^2 + c^2_{13}c^2_{24}c^3_{23}c^4_{24} + c^2_{13}c^3_{23}c^3_{24}c^4_{34} - c^2_{13}c^3_{23}$$
$$c^3_{34}c^4_{24} + c^2_{13}c^3_{24}c^4_{24}c^4_{34} - c^2_{13}c^3_{34}(c^4_{24})^2 - c^2_{14}c^2_{23}c^3_{23}c^4_{24} - c^2_{14}$$
$$c^2_{23}(c^4_{24})^2 + c^2_{14}c^2_{24}c^3_{23}c^4_{23} + c^2_{14}c^2_{24}c^4_{23}c^4_{24} - c^2_{14}(c^3_{23})^2c^4_{34} +$$
$$c^2_{14}c^3_{23}c^3_{34}c^4_{23} - c^2_{14}c^3_{23}c^4_{24}c^4_{34} + c^2_{14}c^3_{34}c^4_{23}c^4_{24} - (c^2_{23})^2c^3_{12}c^3_{34}$$
$$+(c^2_{23})^2c^3_{13}c^3_{24} + (c^2_{23})^2c^3_{14}c^4_{24} - c^2_{23}c^2_{24}c^3_{12}c^4_{34} - c^2_{23}c^2_{24}c^3_{13}$$
$$c^3_{23} - c^2_{23}c^2_{24}c^3_{14}c^4_{23} + c^2_{23}c^2_{24}c^3_{24}c^4_{13} - c^2_{23}c^2_{24}c^3_{34}c^4_{12} + c^2_{23}c^2_{24}$$
$$c^4_{14}c^4_{24} + c^2_{23}c^2_{34}c^3_{12}c^3_{23} + c^2_{23}c^2_{34}c^3_{12}c^4_{24} + c^2_{23}c^3_{12}c^3_{34}c^4_{34} -$$

$$2c^2_{23}c^3_{13}c^3_{24}c^4_{34} + c^2_{23}c^3_{13}c^3_{34}c^4_{24} + c^2_{23}c^3_{14}c^3_{23}c^4_{34} - c^2_{23}c^3_{14}c^3_{34}$$
$$c^4_{23} - c^2_{23}c^3_{14}c^4_{24}c^4_{34} + c^2_{23}c^3_{24}c^3_{34}c^4_{13} - c^2_{23}(c^3_{34})^2c^4_{12} + c^2_{23}c^3_{34}$$
$$c^4_{14}c^4_{24} - (c^2_{24})^2c^3_{23}c^4_{13} - (c^2_{24})^2c^4_{12}c^4_{34} - (c^2_{24})^2c^4_{14}c^4_{23} + c^2_{24}$$
$$c^2_{34}c^3_{23}c^4_{12} + c^2_{24}c^2_{34}c^4_{12}c^4_{24} + c^2_{24}c^3_{12}(c^4_{34})^2 + c^2_{24}c^3_{13}c^3_{23}c^4_{34}+$$
$$c^2_{24}c^3_{14}c^4_{23}c^4_{34} - c^2_{24}c^3_{23}c^3_{34}c^4_{13} + c^2_{24}c^3_{23}c^4_{14}c^4_{34} - c^2_{24}c^3_{24}c^4_{13}c^4_{34}$$
$$-c^2_{24}c^3_{34}c^4_{12}c^4_{34} + c^2_{24}c^3_{34}c^4_{13}c^4_{24} - 2c^2_{24}c^3_{34}c^4_{14}c^4_{23} - c^2_{34}c^3_{12}c^3_{23}$$
$$c^4_{34} - c^2_{34}c^3_{12}c^4_{24}c^4_{34} + c^2_{34}c^3_{23}c^3_{34}c^4_{12} + c^2_{34}c^3_{34}c^4_{12}c^4_{24} + c^3_{13}c^3_{24}$$
$$(c^4_{34})^2 - c^3_{13}c^3_{34}c^4_{24}c^4_{34} - c^3_{14}c^3_{23}(c^4_{34})^2 + c^3_{14}c^3_{34}c^4_{23}c^4_{34} + c^3_{23}$$
$$c^3_{34}c^4_{14}c^4_{34} - c^3_{24}c^3_{34}c^4_{13}c^4_{34} + (c^3_{34})^2c^4_{13}c^4_{24} - (c^3_{34})^2c^4_{14}c^4_{23}$$

となる．この式をどう理解すればよいのだろうか?

$\mathbf{R}[\,c^p_{qr}\,]$ の n 次の $GL(n,\mathbf{R})$-相対不変式の個数

$n=3$ のとき, 2 個

$n=4$ のとき, 2 個

$n=5$ のとき, 4 個

$n=6$ のとき, 8 個

$n=7$ のとき, 21 個

$n=8$ のとき, 47 個

$\vdots$

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ をnの分割とする　(i.e., $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n$)

このとき, plethysm

$$S_\lambda(S_{11}) = S_\lambda \circ S_{11} = \{1, 1\} \otimes \{\lambda\}$$

の中の $S_{\lambda+1} = (\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_n + 1)$ の重複度を,

すべてのλについて足した値がn次相対不変式の個数になる

しかし, 一般に plethysm の分解公式は知られていないので, この重複度は計算してみないことには分からない

$n=3$のとき, $|c|$ 以外のもう一つの3次相対不変式は

$$
\begin{aligned}
&(c^1_{12})^2c^2_{13}-c^1_{12}c^1_{13}c^2_{12}+c^1_{12}c^1_{13}c^3_{13}+c^1_{12}c^2_{12}c^2_{23}\\
&-2c^1_{12}c^2_{13}c^3_{23}+3c^1_{12}c^2_{23}c^3_{13}-(c^1_{13})^2c^3_{12}+3c^1_{13}c^2_{12}c^3_{23}\\
&-2c^1_{13}c^2_{23}c^3_{12}+c^1_{13}c^3_{13}c^3_{23}-c^1_{23}(c^2_{12})^2-2c^1_{23}c^2_{12}c^3_{13}\\
&-c^1_{23}(c^3_{13})^2+c^2_{12}c^2_{23}c^3_{23}+c^2_{13}(c^3_{23})^2-(c^2_{23})^2c^3_{12}\\
&-c^2_{23}c^3_{13}c^3_{23}
\end{aligned}
$$

しかし, この式はJacobi律を満たす $\{c^p_{qr}\}$ については恒等的に0になるので, 今は不要

次元が高くなると，どうしても長い式が出てきて手に負えなくなる

長い式を扱うための一つの工夫 として

$\Longrightarrow$ 古典的不変式論における「記号的方法」

(symbolic method) を使う

ただし，以下の内容は現在進行中の話$\cdots$ です

例で説明する

$$I_{1,1} = c^1_{23}g_{11} + c^2_{31}g_{22} + c^3_{12}g_{33} + (c^1_{31} + c^2_{23})g_{12}$$
$$+(c^2_{12} + c^3_{31})g_{23} + (c^3_{23} + c^1_{12})g_{31}$$

少し長くて, 覚えられない．意味もよく分からない.

そこで, 「式」を「記号」に分解する

$$g_{ij} \Rightarrow g_i g_j, \quad c^p_{qr} \Rightarrow (a_q b_r - a_r b_q)c^p$$

記号同士の積は可換とする

すると, $g_{ij} = g_i g_j$ と分解しても, g_{ij} を g_{ji} に直してから $g_j g_i$ と分解しても結局記号として同じものになるので, g_{ij}, g_{ji} の表記の違いを気にすることなく記号に直すことができる

$c^p_{qr} = -c^p_{rq}$ だが, 前者を記号に直せば $(a_q b_r - a_r b_q)c^p$ で, 後者を直せば $-(a_r b_q - a_q b_r)c^p$ で, 両者は同じもの

記号 g_i, a_q, b_r, c^p は単独では意味をもたないただの「記号」でしかない. しかし, 通常の多項式と同じ感覚で計算して構わない.

ということで, $I_{1,1}$ を記号に分解してみる

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} = {} & c^1_{23}g_{11} + c^2_{31}g_{22} + c^3_{12}g_{33} + (c^1_{31} + c^2_{23})g_{12} \\
& +(c^2_{12} + c^3_{31})g_{23} + (c^3_{23} + c^1_{12})g_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & (a_2b_3 - a_3b_2)c^1(g_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)c^2(g_2)^2 \\
& +(a_1b_2 - a_2b_1)c^3(g_3)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)c^1g_1g_2 \\
& +(a_2b_3 - a_3b_2)c^2g_1g_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c^2g_2g_3 \\
& +(a_3b_1 - a_1b_3)c^3g_2g_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)c^3g_3g_1 \\
& +(a_1b_2 - a_2b_1)c^1g_3g_1
\end{aligned}
$$

重要な点は，このように式を記号に分解しても，
記号からもとの式に「復元」できること

仮にこの式を展開して，項の順序を変え，バラバラにしたとしても $\cdots$

その式を $c^p g_i g_j$ でくくれば，自ずと $a_q b_r - a_r b_q$ の項が現れてくるので，$c^p_{qr} g_{ij}$ に戻せる

だから，記号に分解しても情報は何も失われていない

$I_{1,1}$ を記号に分解すると，かえって長い式に化けたと思うかもしれないが$\cdots$

実はこの記号式は因数分解できて,

$$I_{1,1} = (c^1 g_1 + c^2 g_2 + c^3 g_3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & g_1 \\ a_2 & b_2 & g_2 \\ a_3 & b_3 & g_3 \end{vmatrix}$$

となる! これが $I_{1,1}$ の正体.
こんなに覚えやすい式はないだろう

右辺を展開して, 記号の積を式に戻せば, もとの $I_{1,1}$ の式が復元できる

見かけに反して, $I_{1,1}$ にはこんな構造が隠されていたことになる

次に, 2次元のときの断面曲率

$$k = -\frac{1}{|g|}\{(c^1_{12})^2 g_{11} + 2\,c^1_{12}c^2_{12}\,g_{12} + (c^2_{12})^2 g_{22}\}$$

の分子を記号に分解してみよう

例えば $c^i_{jk}c^p_{qr}$ を素直に

$$c^i_{jk}c^p_{qr} = (a_j b_k - a_k b_j)c^i \times (a_q b_r - a_r b_q)c^p$$

と記号の積に分解すると, 式に戻すときに c^i と c^p を逆にして $c^p_{jk}c^i_{qr}$ にしてしまう恐れがある

このような事態を避けるために，記号に分解するときに記号を使い分けて

$$c^i_{jk}c^p_{qr} = (a_j b_k - a_k b_j)c^i \times (\overline{a}_q\overline{b}_r - \overline{a}_r\overline{b}_q)\overline{c}^p$$

といったふうに，もとの式に戻すときに組になる記号を区別しておくことにする．すると

$$(c^1_{12})^2 g_{11} + 2\,c^1_{12}c^2_{12}\,g_{12} + (c^2_{12})^2 g_{22}$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)c^1(\overline{a}_1\overline{b}_2 - \overline{a}_2\overline{b}_1)\overline{c}^1(g_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c^1$$
$$(\overline{a}_1\overline{b}_2 - \overline{a}_2\overline{b}_1)\overline{c}^2 g_1 g_2 + (\overline{a}_1\overline{b}_2 - \overline{a}_2\overline{b}_1)\overline{c}^1(a_1b_2 - a_2b_1)c^2 g_1 g_2$$
$$+(a_1b_2 - a_2b_1)c^2(\overline{a}_1\overline{b}_2 - \overline{a}_2\overline{b}_1)\overline{c}^2(g_2)^2$$

と一見複雑な式になるが，これも因数分解できて

$$(c^1 g_1 + c^2 g_2)(\overline{c}^1 g_1 + \overline{c}^2 g_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a}_1 & \overline{b}_1 \\ \overline{a}_2 & \overline{b}_2 \end{vmatrix}$$

となる

このようにして，長い式が現れる場面でも記号的方法を使用すれば，コンパクトに表示できる可能性がある

これは今後の課題です