共形場理論, 超幾何関数 そして 量子群

土屋昭博 (I.P.M.U.)

2014年3月6日 沼津高専

参考文献

[1] 青木和彦, 喜多通武 著. 超幾何関数論

[2] 山田泰彦 著. 共形場理論入門.

[3] 土屋昭博 著 2013年 日本数学会 秋期総合分科会 特別講演 アブストラクト. 正の有理レベルにおける sl_2 型拡大 W 代数 と その表現.

予定

[I] ガウスの超幾何関数

[II] 多変数超幾何関数 $_2F_1$.

- Jack 多項式とその積分表示
- $_2F_1$ のみたす線型微分方程式系
- $_2F_1$ の Jack 多項式展開
- $_2F_1$ の積分表示

[III] ヴィラソロ代数と共形場理論

- ヴィラソロ代数の自由場表示
- Energy-Moment tensor, N点関数.
- Screening 作用素, (-1,1), (1,-1) 作用素
- (2,1), (1,2) 作用素

(I) ガウスの超幾何関数

(I-1) ガウスの超幾何関数

$$F(a, b, c : x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a:n)(b:n)}{(c:n)\ n!} x^n.$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

$c \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$

$$(a:n) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1).$$

(I-2) ガウスの超幾何微分方程式

$$E = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{d}{dx} - ab.$$

$$E\, F(a, b, c : x) = 0$$

$E\, y = 0 \qquad y = y(x)$: $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上 2階の

線形微分方程式

③

・$Ey=0$: $\mathbb{C}$上 線形独立な2つの解とし

・$y_1(x), y_2(x)y$: $P^1\setminus\{0,1,\infty\}$上 C^2値多価正則解

，古典的に いくつかの性質 $\boxed{Ey=0}$

① 巾級数解 例 $F(a,b,c;x)$

② Euler−ガウスの積分表示

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}\,du$$

③ ガウスの隣接関係式

$$F(a,b,c:x)=F(a,b+1,c+1,x)-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}x\,F(a+1,b+1,c+2:x)$$

$$F(a,b,c:x)=F(a+1,b,c+1,x)-\frac{b(c-a)}{c(c+1)}x\,F(a+1,b+1,c+2:x)$$

④

II. 多変数超幾何関数 ${}_2F_1$.

(II−1) $N=1,2,\cdots$ 固定 $x \in X_N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ $x_i \neq 0, 1, x_i \neq x_j\}$

$$\Delta_i(a,b,c;x) = x_i(1-x_i)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \Big\{c - \frac{1}{2}(N-1) - (a+b+1) - \frac{1}{2}(N-1)x_i\Big\}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{x_i(1-x_i)}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{x_j(1-x_j)}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\} - ab.$$

$i = 1, 2, \cdots N.$

- $N=1$ ⟹ ガウスの超幾何微分方程式

⑥

・$\{E_i = 0 \quad i=1\cdots n\}$ T_n上確定特異点型

・~~線~~ ~~偏~~ 線形微分方程式系

・解の次元 有限次元

◎ ~~○○~~ 超幾何級数解 ${}_2F_1(a, b, c, \lambda : x_1 \cdots x_n)$

- $(x_1 \cdots x_n)$ について対称
- $x=(0, 0 \cdots 0)$ のまわりで正則. ${}_2F_1(x=0)=1$

となる級数解を唯一つもつ.

◎・ ${}_2F_1(a, b, c, \lambda : x_1 \cdots x_n)$ の Jack 多項式展開.

◎・ ${}_2F_1(a, b, c : \lambda : x_1 \cdots x_n)$ の積分表示

↑

共形場理論における N点関数

- 共形不変性 ⇒ $\Delta_i = 0 \quad i=1, \cdots N$

5

(II-2) Jack 多項式. 無限変数直交多項式.

- $\Lambda = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]^{S_\infty}$ $\quad \deg x_i = 1.\quad \deg p_n = n$

$= \mathbb{C}[p_1, p_2, \cdots]$ $\quad p_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$

- $\Lambda_N = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots x_N]^{S_N}$

$\quad \rho_N : \Lambda \longrightarrow \Lambda_N$ $\quad \left[\begin{array}{ll} x_i \longrightarrow x_i & i = 1, \cdots N \\ x_i \longrightarrow 0 & i \geq N+1 \end{array}\right.$

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ $\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots (\geq 0)$ partition

$\quad |\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ $\quad \ell(\lambda) = \max\{i,\ \lambda_i \geq 1\}$

$\left[\begin{array}{l} p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots \quad \in \Lambda : \quad \deg p_\lambda = |\lambda| \\ \Lambda = \sum_\lambda \mathbb{C} p_\lambda \quad \Lambda = \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda[d] \quad : \text{degree 分解} \end{array}\right.$

・直交多項式: Jack 多項式.

・記号. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \dots)$ 分割

・$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$

・λ, μ: $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu|$, $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$, ...

・$m_\lambda = \sum_{\alpha = w(\lambda)} x^\alpha$ $w \in S_\infty$ $\alpha = w(\lambda) = (\lambda_{w(1)}, \lambda_{w(2)}, \dots) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\infty$

・$\Lambda = \sum_\lambda \mathbb{C} m_\lambda$; $\underline{\deg m_\lambda = |\lambda|}$.

・$\boxed{K \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}}$ 固定

$(\ , \ )_K : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$: 対称 2次形式

$$\underline{(p_\lambda, p_\mu)_K = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda K^{\ell(\lambda)}}$$

定理 スタンレイ ⑦

① 各 λ: Partition $\exists_1$ $P_\lambda(x;\kappa) \in \Lambda[[\kappa]]$: Jack 対称式 パラメータ κ

with. $\langle P_\lambda(x;\kappa), P_\mu(x;\kappa)\rangle_\kappa = 0$ if $\lambda \neq \mu$

. $P_\lambda(x;\kappa) = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu}(\kappa) m_\mu$ $\quad u_{\lambda\mu}(\kappa) \in \mathbb{Q}$

Prop

. $\langle P_\lambda(x,\kappa), P_\mu(x,\kappa)\rangle_\kappa = b_\lambda(\kappa)^{-1}$

$$b_\lambda(\kappa) = \prod_{(i,j)=s\in\lambda} \frac{\kappa(\lambda_i - j) + \cancel{i-1+1} \; i}{\kappa(\lambda_i - j + 1) + i - 1.} \in \mathbb{Q}^*$$

. 記号 $Q_\lambda(x,\kappa) = P_\lambda(x;\kappa)\cdot b_\lambda(\kappa)$

$$J_\lambda(x,\kappa) = \prod_{s=(i,j)\in\lambda} (\kappa(\lambda_i - j) + i)$$

$$J_\lambda^\vee(x,\kappa) = \frac{1}{\langle J_\lambda(x,\kappa), J_\lambda(x;\kappa)\rangle} J_\lambda(x,\kappa)$$

Prop. ① $(P_\lambda(x;\alpha), Q_\mu(x;\alpha))_\alpha = \delta_{\lambda,\mu}$

$\cdot\ (J_\lambda(x;\alpha), J^\vee_\mu(x;\alpha)) = \delta_{\lambda,\mu}$

$\boxed{\text{積にパラメーター } \alpha^{-1}}$ 云々.

② $\displaystyle\prod_{i\geq 1, j\geq 1}(1-x_iy_j)^{-1/\alpha} = \sum_\lambda P_\lambda(x;\alpha)\,Q_\lambda(y;\alpha)$

$\displaystyle = \sum_\lambda J^\vee_\lambda(x;\alpha)\,J_\lambda(y;\alpha)$

再成核

Def. $u \in \mathbb{C}$: distribution on Λ

$\varepsilon_u : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-algebra homomorphism

$p_n \longmapsto u \qquad n=1,2,\dots$

定理

$\cdot\ \varepsilon_u(J_\lambda(x;\alpha)) = \displaystyle\prod_{s=(i,j)\in\lambda}(u+\alpha(i-1)-(j-1))$

$\cdot\ \varepsilon_u \displaystyle\prod_{i\geq 1, j\geq 1}(1-x_iy_j)^{-1/\alpha} = \prod_{j\geq 1} e^{\frac{u}{\alpha}\frac{p_n(y)}{n}} = \prod_{j\geq 1}(1-y_j)^{-u/\alpha}$

Prop. ⑨

- $\rho_N : \Lambda \longrightarrow \Lambda_N \quad \rho_N(P_\lambda(x_1, x_2 \cdots x_N)) = \begin{cases} P_\lambda^{(N)}(x_1 \cdots x_N ; x) & \ell(\lambda) \leq N \\ 0 & \ell(\lambda) > N \end{cases}$

- $\Lambda_N = \sum_{\ell(\lambda) \leq N} \mathbb{C} P_\lambda^{(N)}(x_1 \cdots x_N : x)$

注意. $\rho_N(P_\lambda(x)) \neq 0$ even if $\ell(\lambda) > N$

定義. $N = 2$. $U_N(x_1 \cdots x_N : x) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(1-N)x} \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} (x_i - x_j)^{c}$

- $(\ ,\ )_{x^{-1}}^{N} : \Lambda_N \otimes \Lambda_N \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{cases} (P, Q)_{x^{-1}}^{N} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{C_N(x)} \int \cdots \int_{[0,1]^N} P(x^{-1}) Q(x) U_N(x : x) \dfrac{dx_1}{x_1} \cdots \dfrac{dx_N}{x_N} \\ C_N(x) \overset{\text{def}}{=} \int \cdots \int_{[0,1]^N} U_N(x_1 \cdots x_N : x) \dfrac{dx_1}{x_1} \cdots \dfrac{dx_N}{x_N} \end{cases}$$

定理 Macdonald の本

$\ell(\lambda), \ell(\mu) \leq N$

$$\Rightarrow \langle P_\lambda^{(\alpha)}(x;x^{-1}), P_\mu^{(\alpha)}(x,x^{-1})\rangle_{x^{-1}}^{N}$$

$$= \frac{\langle P_\lambda(x,x^{-1}), P_\mu(x,x^{-1})\rangle_{x^{-1}}}{\delta_{\lambda,\mu}\, b_\lambda(x^{-1})} \cdot \boxed{b_\lambda^{(N)}(x^{-1})} \in \mathbb{C}^{*}$$

注意 $\boxed{P_\lambda(x;x^{-1}) = Q_{\lambda'}(x;x) \quad \forall\lambda \qquad \lambda' : \text{transpose of } \lambda}$

Duality of Jack polynomial 重要な! 省略

II-2. 多変数超幾何関数 ${}_2F_1^{(\alpha)}(a,b,c;\alpha;x_1,\dots,x_N)$

- $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$　$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ partition とする

定義 $C_\lambda^{\alpha}(x_1,\dots,x_N;\alpha) := \alpha^{|\lambda|}\,|\lambda|!\,J_\lambda^{\alpha}(x_1,x_2,\dots;\alpha)$

記号 $a\in\mathbb{C}$　$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ partition

$$[a,\alpha]_\lambda = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\left(a-\frac{1}{\alpha}(i-1)\right)_{\lambda_i} \in \mathbb{C}$$

定義 $a,b,c\in\mathbb{C}$.　$c-\frac{1}{\alpha}(i-1)\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$　$i=1,2,\dots,N$.

$${}_2F_1^{(\alpha)}(a,b,c;\alpha;x_1,\dots,x_N) := \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|=d}\frac{[a;\alpha]_\lambda\,[b;\alpha]_\lambda}{[c;\alpha]_\lambda}\,\frac{C_\lambda^{(\alpha)}(x;\alpha)}{d!}$$

注意 この定義 N に independent ${}_2F_1$

つまり $N=\infty$ で define できて、その $(x_1,\dots,x_N)$ への制限が ${}_2F_1^{(\alpha)}$

Prop $\exists r>0$ such that

$_2F_1^{(n)}(a, b, c, x : x_1 \cdots x_n)$ は

$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < r$ で絶対収束する

II-2. $_2F_1^{(n)}(a, b, c : x, x_1 \cdots x_n)$ のみたす

線形偏微分方程式系

定理 金子 (1993), others.

$_2F_1^{(n)}(a, b, c, x : x_1 \cdots x_n)$

は次の条件をみたす方程式系 (*) $\Delta_i F=0$ $i=1, \cdots N$ の

~~とみたす唯~~一つの解である。

① $(x_1, \cdots, x_n)$ について対称

② $x=(x_1, \cdots, x_n)$ の近ぼうで正則 かつ $F(0)=1$

II-4. ${}_2F_1^{(n)}(a, b, c, x : x_1, \cdots x_n)$ の積分表示

記号 $M \geq 2$, $\rho, \sigma, \kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ generic

$$Y_M = \{(u_1, \cdots u_M) : u_i \neq 0, 1, \ u_i \neq u_j\}$$

$$\Phi_M(u_1, \cdots u_M : \rho, \sigma, \kappa) = \prod_{i=1}^{M} u_i^{\rho-1}(1-u_i)^{\sigma-1} \prod_{1 \leq i < j \leq M} (u_i - u_j)^{2\kappa}$$

Y_M 上の多価正則関数

定義 セルバーグ積分

$$S_M(\rho, \sigma, \kappa) \equiv \int \cdots \int_{[0,1]^M} \Phi_M(u_1 \cdots u_M : \rho, \sigma, \kappa)\, du_1 \cdots du_M$$

特) 積分の regularization

定義 $N \geq 2,\ M \geq 2$

$$S_{M,N}(x_1,\cdots,x_N;\rho,\sigma,\kappa) \equiv \int\cdots\int_{[0,1]^M} \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}(1-x_i u_j)^{-\kappa}\, \Phi_M(u_1,\cdots u_M;\rho,\sigma,\kappa)\, du_1\cdots du_M$$

by 積分の正則化

- $(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{C}^N$ $|x| = \sqrt{\sum|x_i|^2} < 1$ で well defined
- $(x_1,\cdots x_N)$ について解析関数
- $S_{M,N}(0,\cdots 0;\rho,\sigma,\kappa) \equiv S_M(\rho,\sigma,\kappa)$ セルバーグ積分

$$= \prod_{i=1}^{M}\frac{\Gamma(1+i\kappa)\,\Gamma(\rho+i\kappa)\,\Gamma(\sigma+i\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)\,\Gamma(\rho+\sigma+(M+i-1)\kappa)}$$

(18)

定理 金子 and others

$$S_{M,N}(x_1,\dots,x_N;\rho,\sigma;\varkappa)$$

$$= S_{M,d}(\rho,\sigma,\varkappa)\,{}_2F_1^{(\alpha)}(\varkappa M,\ \varkappa(M-1)+\rho,\ 2\varkappa(M-1)+\rho+\sigma;\ x_1,\dots,x_n)$$

系：Jack 多項式のセルベルグ積分に関する
マクドナルド予想 $\ell(\lambda)\le n$

$$\int\cdots\int_{[0,1]^M} J_\lambda(u_1,\dots,u_M;\varkappa^{-1})\,\Phi_M(u_1,\dots,u_M;\rho,\sigma,\varkappa)\,du_1\cdots du_M$$

$$= S_{M,d}(\rho,\sigma,\varkappa)\,\frac{[\varkappa M;\varkappa]_\lambda\,[\varkappa(M-1)+\rho;\varkappa]_\lambda}{[2\varkappa(M-1)+\rho+\sigma;\varkappa]_\lambda}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{|\lambda|}$$

証明 $$\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{n}(1-x_i u_j)^{-\varkappa} = \sum_\lambda J_\lambda^{\vee}(x_1,\dots,x_n;\varkappa)\,J_\lambda(u_1,\dots,u_M;\varkappa)$$

を使う。

III ヴィラソロ代数と共形場理論

III-1. 共形場理論

・2次元統計物理学における臨界現象をあつかう場の量子論

・1984年 ロシアの3人の物理学者 Belavin, Polyakov, Zamolodchikov により確立

・Virasoro 代数の対称性

$$\mathcal{L} = \sum_n \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$$

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\,C \\ C \in \text{center} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_n \longrightarrow l_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz} \\ C \longrightarrow 0 \end{cases}$$

中心拡大

ヴィラソロ代数の特殊性 ＝ 表現

・臨界指数

・N点関数を特徴づける確定特異点型線形微分方程式系の確立

・c = ヴィラソロ代数の中心 = $1-6\frac{(p-q)^2}{pq}$

$p \geq 2,\ q \geq 2 \quad (p,q)=1$ } の場合

ヴィラソロ代数の極小表現

・今日の目的

・ヴィラソロ代数の自由場表示

・N点関数のみたす微分方程式

$\Longrightarrow$ $\mathcal{D}_n = 0$ の解、積分表示

c：一般の場合

18

・自由場表示

$$\begin{cases} b(z) = \sum_n b[n] z^{-n-1} & [b[m], b[n]] = m\,\delta_{m+n,0}\,\mathrm{id} \\ \varphi(z) = \hat{b} + b[0]\log z - \sum_{n\neq 0} \frac{b[n]}{n} z^{-n} \end{cases}$$

・$\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w)$, $\partial\varphi(z) = b(z)$

$b(z)b(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}$

・Fock表現

・$\beta \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} F_\beta \ni |\beta\rangle & b[n]|\beta\rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad b[0]|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \\ F_\beta^\vee \ni \langle\beta| & \langle\beta| b[-n] = 0 \quad n \geq 1. \quad \langle\beta| b[0] = \beta\langle\beta| \end{cases}$

$U(b) = U(\bar{b}) \otimes U(b_0)$ $\quad \bar{b} = b_- \oplus b_+ \quad b_0 = \mathbb{C}b[0]$

$b_\pm = \sum_n \mathbb{C} b[\pm n]$

$$U(\bar{b}) = U(b_-) \otimes U(b_+) \qquad \deg b[n] = -n$$

(18)

- $\alpha_+ . \alpha_- \in \mathbb{C}$ $\alpha_+ \cdot \alpha_- = -2$ 固定

$$k_\pm = \frac{1}{2}\alpha_\pm^2 \quad k_+ \cdot k_- = 1, \quad \underline{k_+ . k_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}}$$

- Energy-Moment tensor

$$T(z) = \frac{1}{2} :b(z)^2: + \frac{\alpha_0}{2} \partial b(z) = \sum_n L[n] z^{-n-2}$$

$$[L[m], L[n]] = (m-n) L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} C_{k_+ k_-}$$

$$C_{k_+ . k_-} = \cancel{\ldots} = 13 - 6(k_+ + k_-)$$

注意

$$\boxed{\begin{array}{l} L_n|\beta\rangle = 0 \quad n \geq 1 \qquad L_0|\beta\rangle = h_\beta|\beta\rangle \\ h_\beta = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha_0\beta) \end{array}}$$

$F_\beta \ni |\beta\rangle$: left Virasoro module

$F_\beta^\vee \ni |\beta\rangle$ right Virasoro module

$\langle\ ,\ \rangle : F_\beta^\vee \otimes F_\beta \to \mathbb{C}$ $\langle\beta|\beta\rangle = 1$. $\langle v| b[n] | w\rangle = \langle v|b[n] w\rangle$

Prop. F_β: 可約 Virasoro 加群

$$\Longleftrightarrow {}^\exists r \geq 1,\ s \geq 1. \quad \beta = \beta_{rs} = \frac{1-r}{2}\alpha_+ + \frac{1-s}{2}\alpha_-$$

$$h_{r,s} = h_{\beta_{r,s}} = \frac{1-r^2}{4}x_+ - (rs-1) + \frac{1-s^2}{4}x_-$$

頂点作用素 $\beta \in \mathbb{C}$

$$V_\beta(z) = :e^{\beta\varphi(z)}: = e^{\beta\hat{b}} z^{\beta b(0)} e^{\beta\varphi^-(z)} e^{\beta\varphi^+(z)}$$

$$\cdot\ \varphi^\pm(z) = \mp \sum_{\pm n \geq 1} \frac{b[n]}{n} z^{-n}$$

$$\cdot\ \bar{V}_\beta(z) = e^{\beta\varphi^-(z)} e^{\beta\varphi^+(z)}$$

$$\in U(\hat{\mathfrak{h}})[[z, z^{-1}]]$$

• $V_\beta(z): F_{\beta_1} \longrightarrow F_{\beta+\beta_1}[[z, z^{-1}]]\, z^{\beta\beta_1}$

• $\underline{V_{\beta_1}(z_1)\cdots V_{\beta_N}(z_N)}^{\beta} : V_\beta(z) \longrightarrow V_{\beta+\beta_1+\cdots+\beta_N}$

$$\| $$

$$e^{\sum_{i=1}^{N} \beta_i \hat{b}} \prod_{i=1}^{N} z_i^{\beta_i \beta} \prod_{1\le i<j\le N} (z_i - z_j)^{\beta_i \beta_j}$$

$$: \tilde{V}_{\beta_1}(z_1)\cdots \tilde{V}_{\beta_N}(z_N) :$$

$$\in U(\hat{b}) \otimes \mathbb{C}[z_1^{\pm}\cdots z_N^{\pm}]$$

$$T(z)V_\beta(w) \sim \frac{h_\beta}{(z-w)^2} V_\beta(w) + \frac{1}{z-w}\partial V_\beta(w)$$

• 共形次元 h_β の Primary 場

・N点関数 $\Phi_1(z_1), \cdots \Phi_N(z_N)$: Primary field.

・Φ_i: 共形次元 h_i

$|0\rangle, \langle 0|$ Vacuum Vector $\begin{cases} L_n|0\rangle=0 & n\geq -1 \\ \langle 0|L_{-n}=0 & n\geq 1 \end{cases}$

目的 N点関数

$\langle \Phi_1(z_1)\cdots \Phi_N(z_N)\rangle$ を求めよ。

B.P.Z による方法

①

① 共形不変性

$$\langle T(w)\,T(w_1)\cdots T(w_n)\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_n(z_n)\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}c}{(w-w_i)^4}\langle T(w_1)\cdots\check{T}(w_i)\cdots T(w_n)\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_n(z_n)\rangle$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{(w-w_i)^2}+\frac{1}{w-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\right)\langle T(w_1)\cdots T(w_n)\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_n(z_n)\rangle$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{(w-z_i)^2}+\frac{1}{w-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle T(w_1)\cdots T(w_n)\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_n(z_n)\rangle$$

② 特別な Primary 場の Insertion

(例) $\Phi_\pm(z)$ 共形次元 $h_{2,1}$ 写 or $h_{1,2}$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\kappa_\pm L_{-2}\right)(\Phi_\pm(z))=0 \qquad \text{Schrödinger 方程式}$$

$$\boxed{L_{-2}\,\Phi(z)=\oint_{z}\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{-n}\,T(w)\,\Phi(z)}$$

Dotsenko Fateev による自由場表示

① $V_\beta(z)$: 共形次元 h_β.

しかし $V_\beta(z): F_{\beta_1} \longrightarrow F_{\beta+\beta_1}$: Charge Current

② Screening Operator $h_{\alpha_\pm}=1$

$S_\pm(z) = V_{\alpha_\pm}(z)$ $\quad S_\pm(z)\,T(w) \sim \left[\frac{1}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w T(w)\right] = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{z-w}T(w)\right)$

$\int\cdots\int S_\pm(u_1)\cdots S_\pm(u_p)\,du_1\cdots du_p$

$: F_\beta \longrightarrow F_{\beta+p\alpha_\pm}$

Virasoro 代数と交換

合せて

$S_{M,N}(z_1, \ldots, z_N)$

$$= \int \cdots \int_{[0,1]^M} \langle \beta + M\alpha_+ - \tfrac{N}{2}\alpha_+ | V_{-\frac{1}{2}\alpha_+}(z_1) \cdots V_{-\frac{1}{2}\alpha_+}(z_N)$$

$$S_+(u_1) \cdots S_+(u_M) | \beta \rangle \, du_1 \cdots du_M$$

$$= \int \cdots \int_{[0,1]^M} \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} (z_i - u_j)^{-\alpha_+} \prod_{i=1}^{N} z_i^{-\frac{1}{2}\alpha_+ \beta} \prod_{j=1}^{M} u_j^{\alpha_+ \beta}$$

$$\prod_{1 \le i < j \le N} (z_i - z_j)^{\frac{1}{2}\alpha_+} \prod_{1 \le i < j \le M} (u_i - u_j)^{\alpha_+} \, du_1 \cdots du_M$$

は $(z_1 \cdots z_N)$ について 確定特異点型

微分方程式をみたす.

$z_i \to \frac{1}{z_i}$ と変数変換して ${}_2F_1^{(N)}$ のみたす微分方程 p.88