等長変換群の存在を妨げる幾何学量について

大阪市立大学　　友田健太郎

arXiv: 1804.11032（3次元　正定値計量）

arXiv: 1902.07899（3次元　不定計量）

問.

3D pp-wave spacetime

$$g \;=\; h(u,x)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2$$

において，キリング方程式を考える.

$$\pounds_K\, g_{ab} \;=\; 0$$

- 線型独立な解(Killing vector, KV) K^a は
  いくつ存在しますか？

問.

3D pp-wave spacetime

$$g \;=\; h(u,x)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2$$

において $\pounds_K\, g_{ab} \;=\; 0$ を考える.

- g が v に依存してないから $(\partial_v)^a$ は解
- $h_{,xx} = 0$ なら $R_{ab} = 0$ だから最大対称

解.

- $h_{,xx} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} 6\ \text{KVs}$

$$h_{,xx} = 0 \ \Big\downarrow^{\text{no}}\ h_{,xxx} = 0$$

$$h_{,xxx} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} 4\ \text{KVs}, \qquad \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{no}} 3\ \text{KVs}$$

$$h_{,xxx} = 0 \ \Big\downarrow^{\text{no}}\ \left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,x} = 0$$

$$\left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,x} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} \left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} \left(\frac{h_{,xxu}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = \frac{h_{,xx}}{2}\left(\frac{h_{,x}}{h_{,xx}}\right)_{,x} \xrightarrow{\text{yes}} 3\ \text{KVs}$$

$$\left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = 0 \ \Big\downarrow^{\text{no [type B]}}\ 1\ \text{KV}$$

$$\left(\frac{h_{,xxu}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = \frac{h_{,xx}}{2}\left(\frac{h_{,x}}{h_{,xx}}\right)_{,x} \ \Big\downarrow^{\text{no [type A]}}\ \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = 0$$

$$\left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} 2\ \text{KVs}, \qquad \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{no}} 1\ \text{KV}$$

$$\left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,x} = 0 \ \Big\downarrow^{\text{no}}\ \left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = 0$$

$$\left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = 0 \xrightarrow{\text{yes [type C]}} \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = \frac{h_{1,u}}{h_1} - \frac{h_{2,u}}{h_2} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} 2\ \text{KVs}, \qquad \xrightarrow{\text{no}} 1\ \text{KV}$$

$$\left(\frac{h_{,xxx}}{h_{,xx}}\right)_{,u} = 0 \ \Big\downarrow^{\text{no [type D]}}\ \left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = \frac{h_{1,u}}{h_1} - \frac{h_{2,u}}{h_2} = 0$$

$$\left(\frac{h_{2,u}}{h_2^{3/2}}\right)_{,u} = \frac{h_{1,u}}{h_1} - \frac{h_{2,u}}{h_2} = 0 \xrightarrow{\text{yes}} 2\ \text{KVs}, \qquad \xrightarrow{\text{no}} 1\ \text{KV}$$

考えること

キリング方程式

$$\pounds_K\, g_{ab} = 0$$

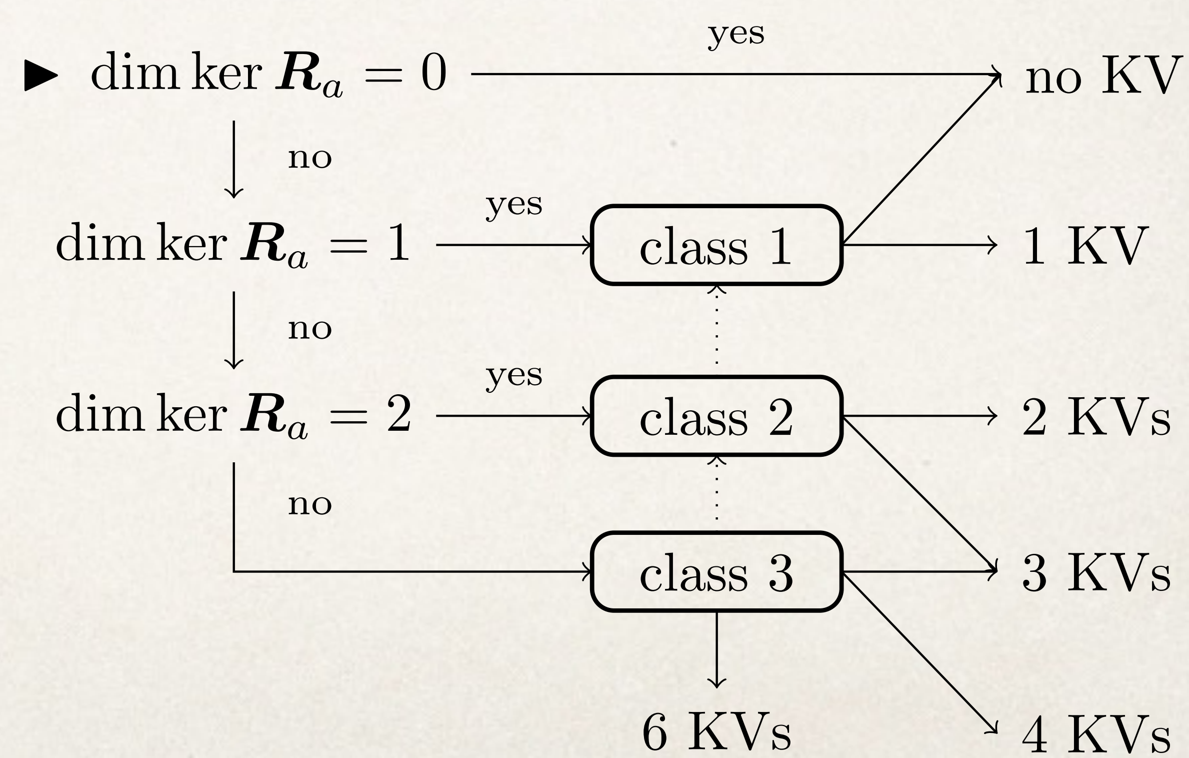
- 与えられた g_{ab} 対して解 K^a はある？
- あるなら，何個の独立な解がある？
- その個数をどうやって判定する？

伝えたいこと

キリング方程式

$$\pounds_K \, g_{ab} = 0$$

解の個数は,
ある幾何学量の値を
判定することでわかる



- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- まとめと展望

- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- まとめと展望

曲率不変量

計量，リーマン曲率テンソル及びその k 階微分

$$\left\{g_{ab},\ g^{ab},\ R_{abc}{}^{d},\ \ldots,\ \nabla_{a_1}\cdots\nabla_{a_k}R_{bcd}{}^{e}\right\}$$

の添え字を完全に縮約して作られる
スカラーを k 階の曲率不変量と呼ぶ

- **0 階の曲率不変量**

$$\left\{R,\ R_{ab}R^{ab},\ R_{abcd}R^{abcd},\ \ldots\right\}$$

定理（Weyl—Kerr, 1962）

リーマン多様体 (M, g_{ab}) の点 p で

$$\mathcal{O}_p^k = \{x \in M \;:\; \mathcal{I}_x^k = \mathcal{I}_p^k\}$$

$$\mathcal{R}_p^k = \Big\{A \in SO(T_pM, g_{ab}) \;: \; A \text{ preserves } \nabla_{a_1} \cdots \nabla_{a_{k'}} R_{bcd}{}^e|_p,\ k' \geq k\Big\}$$

$\mathcal{I}_p^k$: set of the curvature inv. of order k

キリング方程式の解空間の次元 d は

$$d = \underbrace{\dim \mathcal{O}_p^k}_{\text{軌道}} + \underbrace{\dim \mathcal{R}_p^k}_{\text{等方部分群}} \quad \text{for sufficiently large } k$$

注意

- k の下限値 (Console-Olmos, 2008)

$$k_\ell = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (n = \dim M)$$

- k_ℓ で定理が機能するとき

$$n = 2 \quad \cdots \quad \text{there are 9 curv. inv.}$$
$$n = 3 \quad \cdots \quad \text{there are 333 curv. inv.}$$

- 不定計量には機能しない

$$g = h(u,x)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2$$

Vanishing Scalar Invariant space

Cartan scalar

曲率テンソル及びその k 階微分

$$\left\{R_{abc}{}^{d}, \nabla_a R_{bcd}{}^{e}, \ldots, \nabla_{a_1} \cdots \nabla_{a_k} R_{bcd}{}^{e}\right\}$$

の添え字を基底

$$\{e_1^a, e_2^a, \ldots, e_n^a\}$$

で縮約したものを k 階のCartan scalarと呼ぶ

定理 (Cartan—Karlhede, 1980)

(擬)リーマン多様体 (M, g_{ab}) **の点** p **で**

$$\mathcal{C}_p^k \ : \ \text{set of the Cartan scalars of order } k$$

$$\begin{cases} k \text{ is the lowest value for which the elements of} \\ \mathcal{C}_p^{k+1} \text{ are functionally dependent on those in } \mathcal{C}_p^k \end{cases}$$

If $\mathcal{C}_p^k$ contains m functionally independent quantities

キリング方程式の解空間の次元 d **は**

$$d \ = \ \frac{n(n+1)}{2} - m \qquad (n \ = \ \dim M)$$

注意

- k の上限値 (Cartan, 1946)

$$k_u = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n = \dim M)$$

- k の上限値 (Karlhede, 1980)

$n = 4 \quad \cdots$ In the worst case

this requires 7 differentiations

$\cdots$ In Petrov D vacuum solutions

this requires 2 differentiations

$$\therefore \quad k_u = 7 \quad \text{for} \quad n = 4$$

一方

定理（Darboux, 1887）

2次元(擬)リーマン多様体 (M, g_{ab}) 上のキリングベクトルの数は，下図で判定される：

▶

$$
\begin{tikzcd}
dR = 0 \arrow[r, "\text{yes}"] \arrow[d, "\text{no}"] & 3\ \text{KVs} \\
dR \wedge d[(\nabla_a R)(\nabla^a R)] = 0 \arrow[r, "\text{no}"] \arrow[d, "\text{yes}"] & \text{no KV} \\
dR \wedge d\Delta R = 0 \arrow[r, "\text{yes}"] \arrow[ur, "\text{no}"] & 1\ \text{KV}
\end{tikzcd}
$$

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} R g_{a[c} g_{d]b} \qquad R \ : \ \text{Ricci scalar}$$

$$\Delta R = g_{ab} \nabla^a \nabla^b R$$

総括

to Weyl—Kerr

- k の上限値を見積もることはできないか

to Cartan—Karlhede

- k の上限値をより正確に見積もれないか
- 計算可能性はある．複雑性は？

to Darboux

- $n > 2$ で，同様の判定ができないか

- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- まとめと展望

- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- まとめと展望

キリング方程式

$$\pounds_K\, g_{ab} = 0$$

キリング方程式の可積分条件

$$\Rightarrow \quad \pounds_K\, R_{abcd} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pounds_K\, R_{ab} = 0 \qquad \pounds_K\, R = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pounds_K (\mathrm{curv.\ inv.}) = 0$$

障害行列 $\boldsymbol{R}_a$ （ $n(n-1)/2 \times n$ 行列）

$$\boldsymbol{R}_a \equiv \begin{pmatrix} \nabla_a R \\ \nabla_a S^{(2)} \\ \vdots \\ \nabla_a S^{(n)} \\ \nabla_a W^{(2)} \\ \vdots \\ \nabla_a W^{(n[n-1]/2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n &= \dim M \\ R &: \text{Ricci scalar} \\ S^a{}_b &: \text{traceless Ricci} \\ W^{ab}{}_{cd} &: \text{Weyl tensor} \\ S^{(i)} &= \mathrm{Tr}\,\underbrace{S\cdots S}_{i} \\ W^{(j)} &= \mathrm{Tr}\,\underbrace{W\cdots W}_{j} \end{aligned}$$

K^a : KV $\Rightarrow$ $\boldsymbol{R}_a K^a = 0$

$$K^a : \mathrm{KV} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_a\, K^a = 0$$

- **行列方程式の一般解**

$$K^a = \sum_{\alpha=1}^{\dim \ker \boldsymbol{R}_a} \omega_\alpha\, e^a_\alpha$$

e^a_α : an annihilator of $\boldsymbol{R}_a$ **既知**

ω_α : arbitrary scalars **未知**

$$K^a : \ \mathrm{KV} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_a \, K^a = 0$$

- 行列方程式の一般解

$$K^a = \sum_{\alpha=1}^{\dim \ker \boldsymbol{R}_a} \omega_\alpha e^a_\alpha$$

キリング方程式へ

$$\Rightarrow \quad \nabla_a \boldsymbol{\omega} = \Omega_a \, \boldsymbol{\omega}$$

発展方程式

$$0 = \left(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}\right) \boldsymbol{\omega}$$

可積分条件

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta} \equiv \pounds_{[\alpha}\omega_{\beta]}\right)^T$$

Ω_a : R_{abcd} で書かれる

$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \;=\; 1$ **のとき**

$$K^a \;=\; \omega_1\, e_1^a$$

$$\left(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}\right)\omega_1 \;=\; 0$$

1本KVがある $\omega_1 \;\neq\; 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}\right) \;=\; 0$$

1本もKVがない $\omega_1 \;=\; 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}\right) \;\neq\; 0$$

$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \;=\; 2$ **のとき**

$$K^a \;=\; \omega_1\, e_1^a + \omega_2\, e_2^a$$

$$(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_{12} \end{pmatrix} \;=\; 0$$

3本KVがある

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rank}(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}) \;=\; 0$$

1本もKVがない

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rank}(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}) \;=\; 3$$

$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \;=\; 2$ **のとき**

$$K^a \;=\; \omega_1\, e_1^a + \omega_2\, e_2^a$$

$$\left(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}\right)\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_{12}\end{pmatrix} \;=\; 0$$

2本KVがあるとき, $\omega_{12} \;=\; c_1\,\omega_1 + c_2\,\omega_2$ **で**

$\Rightarrow$ $$\left(\nabla_{[a}\Omega'_{b]} - \Omega'_{[a}\Omega'_{b]}\right)\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ **2本か0本かは確定する**

$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \;=\; 2$ **のとき**

$$K^a \;=\; \omega_1\, e_1^a + \omega_2\, e_2^a$$

$$(\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]}) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_{12} \end{pmatrix} \;=\; 0$$

1本KVがあるとき, $c_1\,\omega_1 + c_2\,\omega_2 \;=\; 0$ **なので**

$\Rightarrow$ $$K^a \;=\; \omega_1'\, e_1^a$$

$$(\nabla_{[a}\tilde{\Omega}_{b]} - \tilde{\Omega}_{[a}\tilde{\Omega}_{b]})\omega_1' \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ **1本か0本か確定する**

• • •

- 以下同様に，KVの本数を確定できる
- 具体的には，各 $\dim\ker \boldsymbol{R}_a$ において

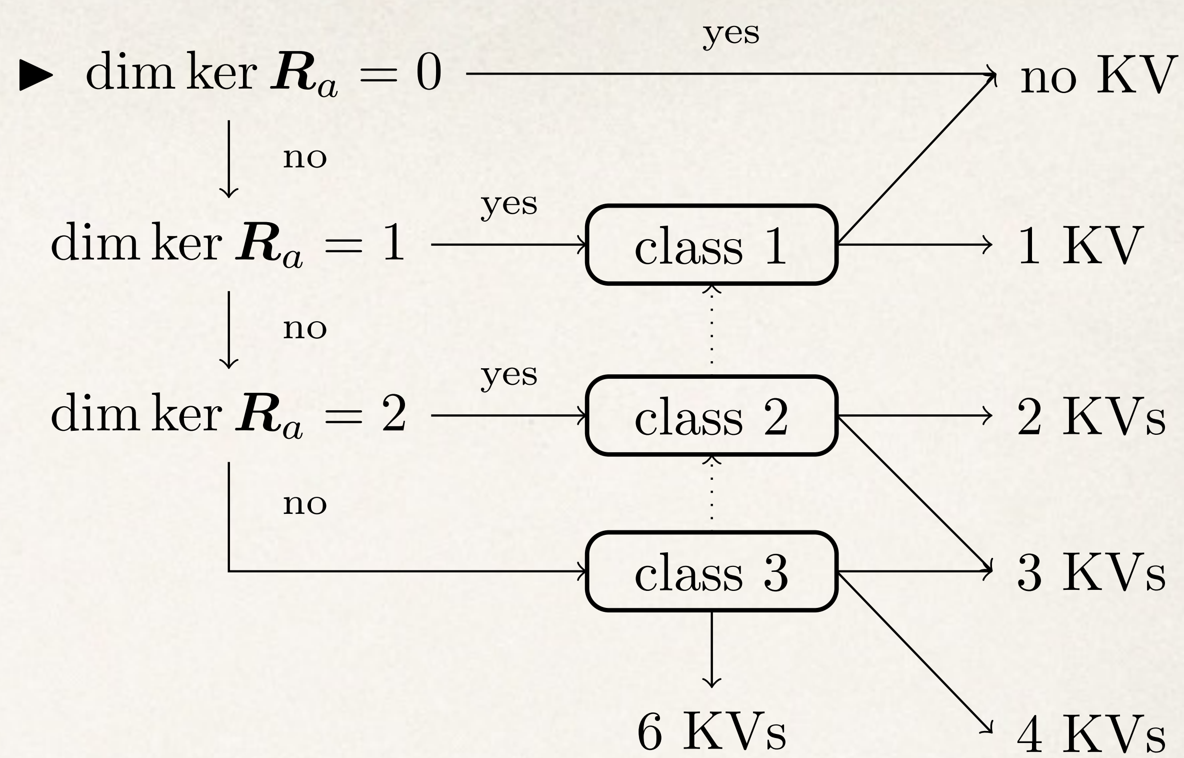
$$\nabla_{[a}\Omega_{b]} - \Omega_{[a}\Omega_{b]} \;=\; 0$$

を書き下すことが目標.

- $\dim M \;=\; 2$ はDarbouxがやった.
$\dim M \;\geq\; 3$ はどうか？

定理

3次元(擬)リーマン多様体の独立なキリングベクトルの数は，右のフローチャートと各classのフローチャートによって代数的に決定できる.



$$\boldsymbol{R}_a \equiv \begin{pmatrix} \nabla_a R \\ \nabla_a S^{(2)} \\ \nabla_a S^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R &: \text{Ricci scalar} \\ S_{ab} &= \text{traceless Ricci} \\ S^{(2)} &= S^a{}_b S^b{}_a \\ S^{(3)} &= S^a{}_b S^b{}_c S^c{}_a \end{aligned}$$

- **注意**

  $\boxed{\text{class X}}$ **のフローチャートの詳細：**

  [arXiv: 1804.11032]（正定値）

  [arXiv: 1902.07899]（不定）

- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- まとめと展望

- はじめに
- 知られていること
- わかったこと
- **まとめと展望**

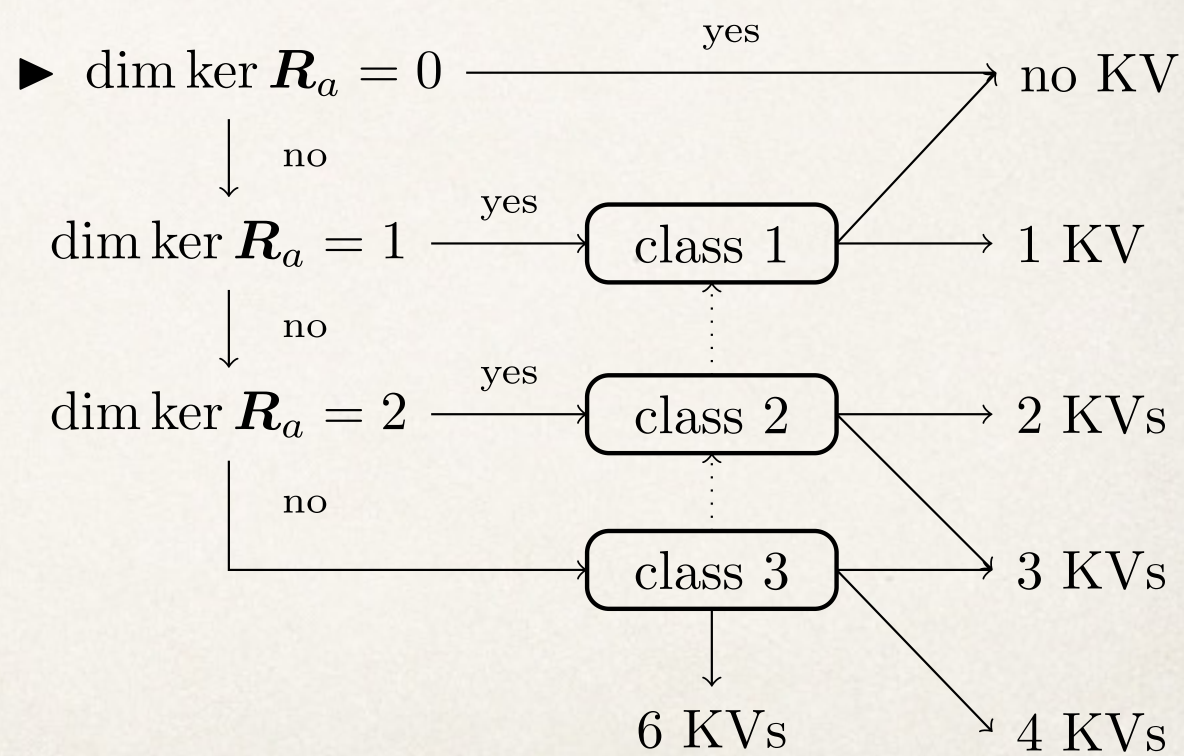
まとめと展望

- キリング方程式の解の個数は幾何学量を用いた代数的手続きで判定可能
- 計量の標準形かける？
- もっと高次元？
- 他の過剰決定系では？

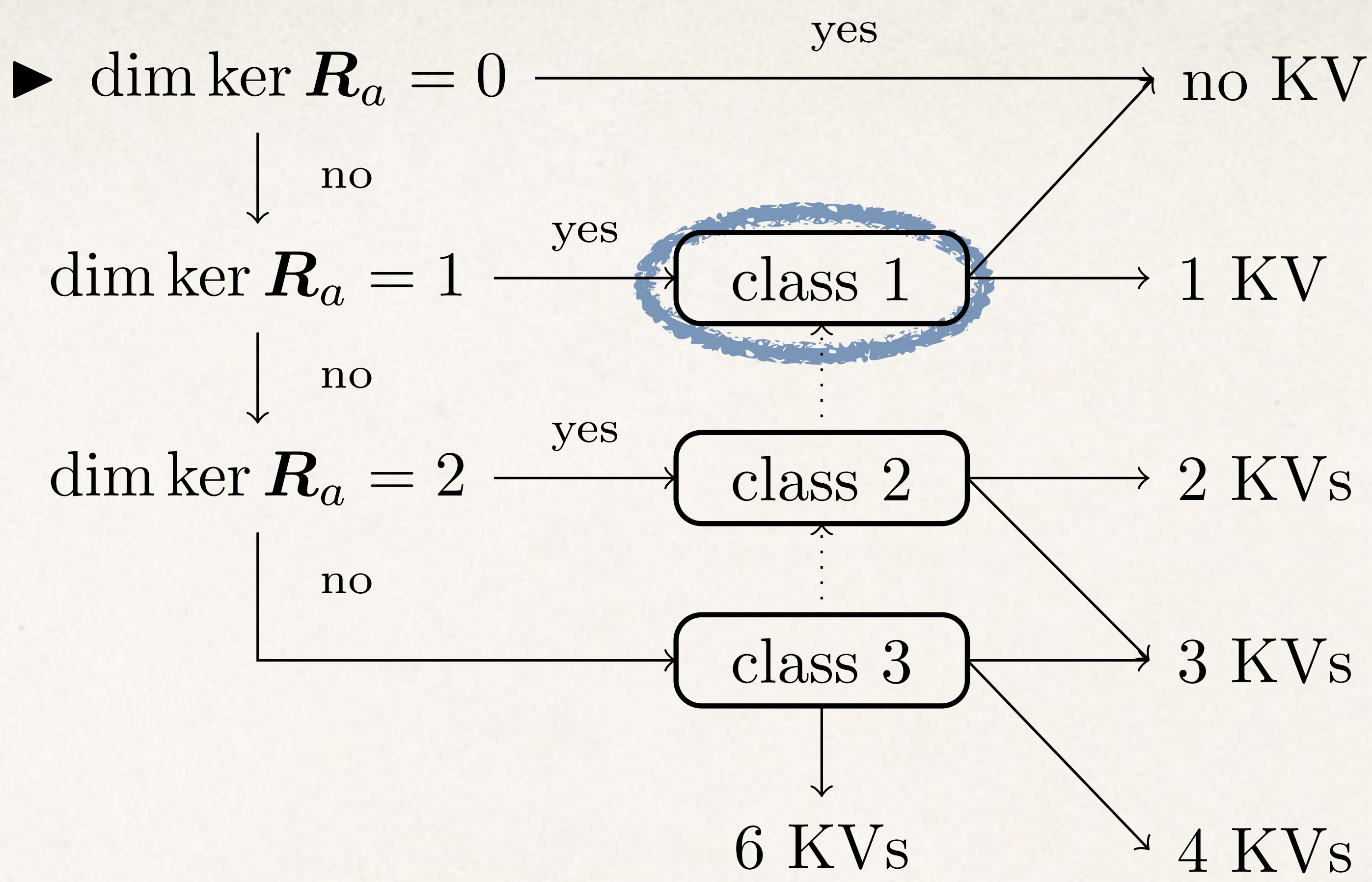
キリング方程式

$$\pounds_K\, g_{ab} = 0$$

代数的手続き



Back up



class I

$$\dim\ker \boldsymbol{R}_a = 1$$

キリングベクトル

$dR \wedge dS^{(2)} \neq 0$ とする

$$K^a = \omega\, U^a$$

$$\begin{cases} \omega \;:\; \text{unknown scalar} \\ U^a = U\, \epsilon^{abc}(\nabla_b R)(\nabla_c S^{(2)}) \end{cases}$$

注意

$$\boldsymbol{R}_a U^a = 0$$

$$g_{ab} U^a U^b = 1$$

キリング方程式

$$\begin{aligned}\kappa_{ab} &= 0 \\ \nabla_a \omega &= \Omega_a\, \omega\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\Omega_a &= U^b \nabla_b U^a \\ \kappa_{ab} &= q^c{}_a q^d{}_b \nabla_c U_d \\ q_{ab} &= g_{ab} - U_a U_b\end{cases}$$

注意

U^a **がsurface formingならば**

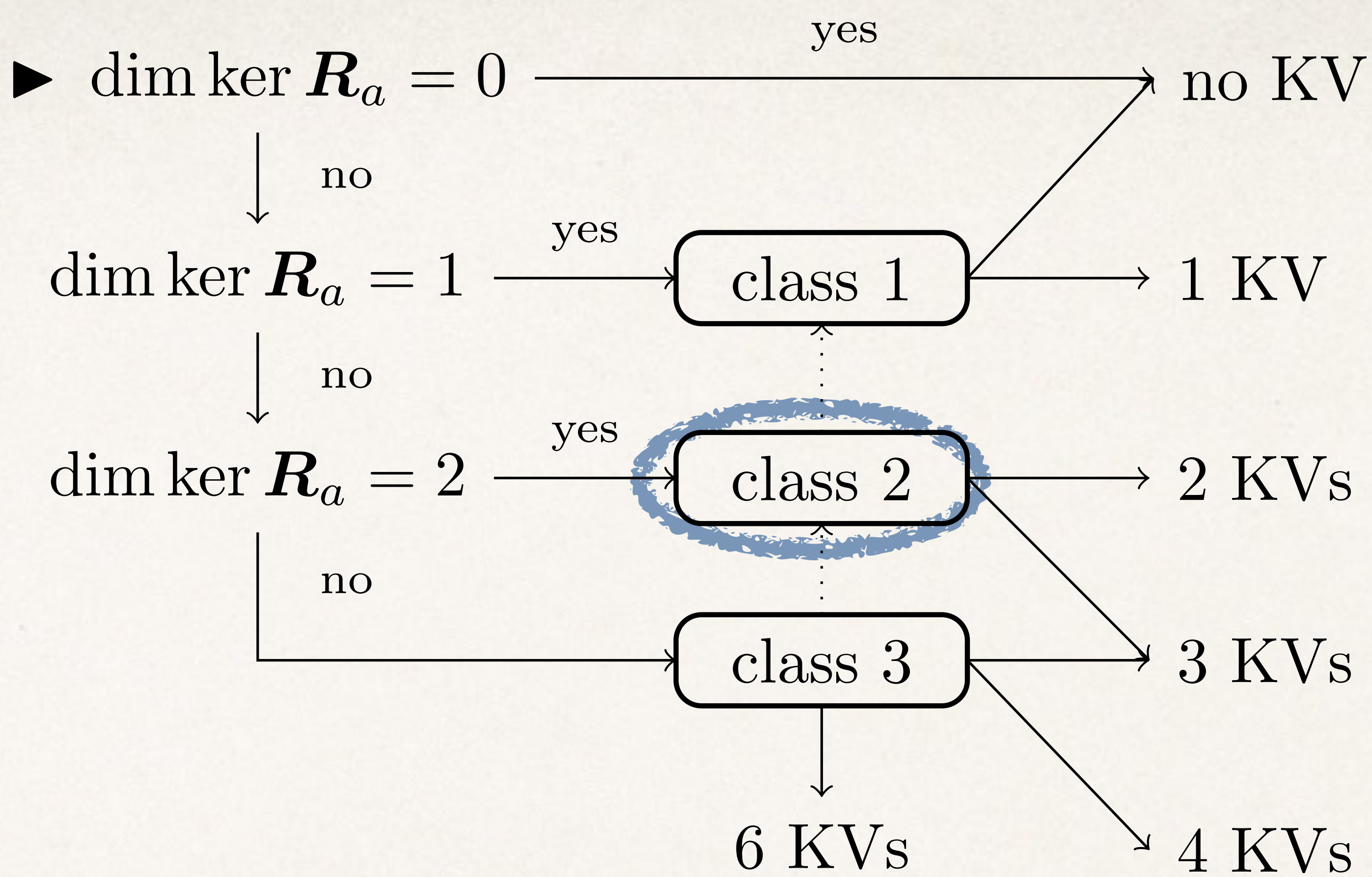
q_{ab} : induced metric

κ_{ab} : extrinsic curvature

と解釈可能

class I のフローチャート

- $$\begin{tikzcd} \kappa_{ab} = \nabla_{[a}\Omega_{b]} = 0 \arrow[r, "\text{yes}"] \arrow[dr, "\text{no}"'] & 1\ \text{KV} \\ & \text{no KV} \end{tikzcd}$$



class II

$$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \; = \; 2$$

$dR \neq 0$ とする

$$\{T^a, N^a, B^a\} \ : \ \text{orthonormal frame}$$

$$T^a \ \equiv \ \frac{\nabla^a R}{\sqrt{(\nabla^m R)(\nabla_m R)}}$$

キリングベクトル

$$K^a \ = \ \omega_N N^a + \omega_B B^a$$

$$\{\omega_N, \omega_B\} \ : \ \text{unknown scalars}$$

$$\{N^a, B^a\} \ : \ \text{annihilators of } \boldsymbol{R}_a$$

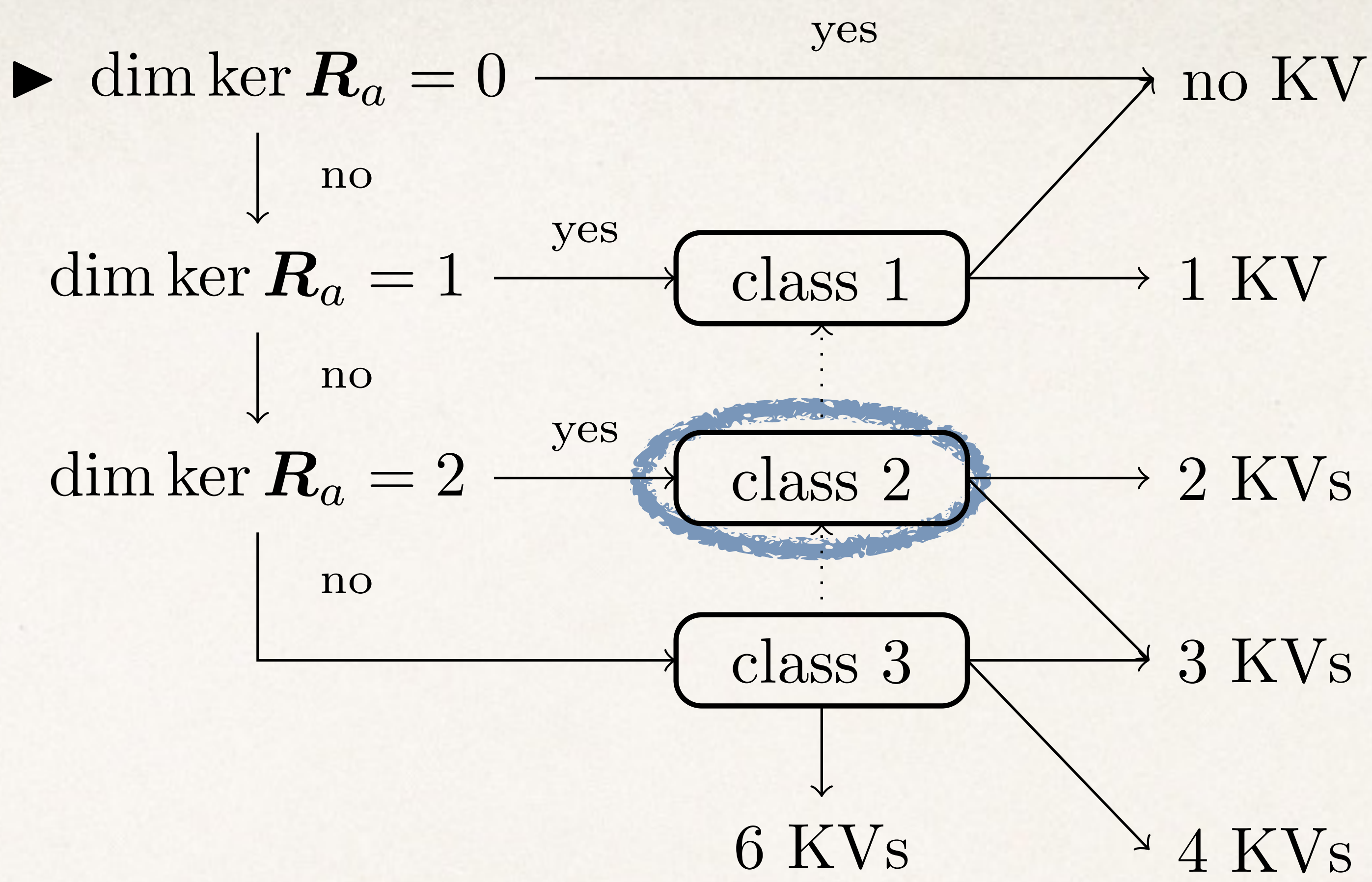
キリング方程式のTT成分

$$(\omega_N N^a + \omega_B B^a)\ \underline{T^b \nabla_b T_a}\ =\ 0$$

$T^a\ \propto\ \nabla^a R$ **の積分曲線は測地線か？**

Yes or Noに依って

解析が分岐する



class II

$$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \;=\; 2$$

with $\quad T^b \nabla_b T^a \neq 0$

$dR \neq 0$ **とする**

$\{T^a, N^a, B^a\}$: Frenet-Serret frame

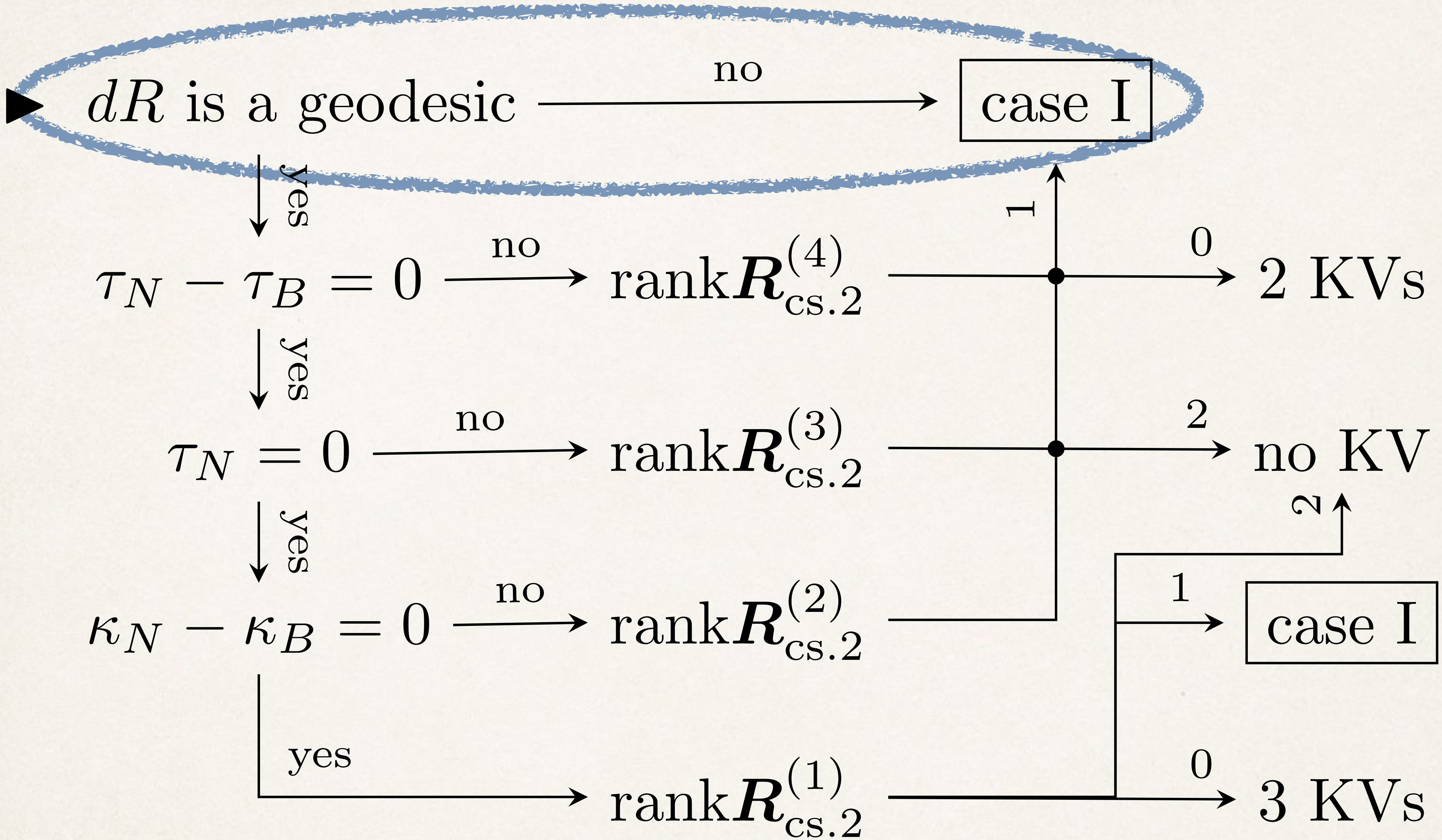
$$T^a \propto \nabla^a R$$
$$N^a \propto T^b \nabla_b T^a$$
$$B^a \equiv \epsilon^{abc} T_b N_c$$

$$T^b \nabla_b \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_T & 0 \\ -\kappa_T & 0 & \tau_T \\ 0 & -\tau_T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix}$$

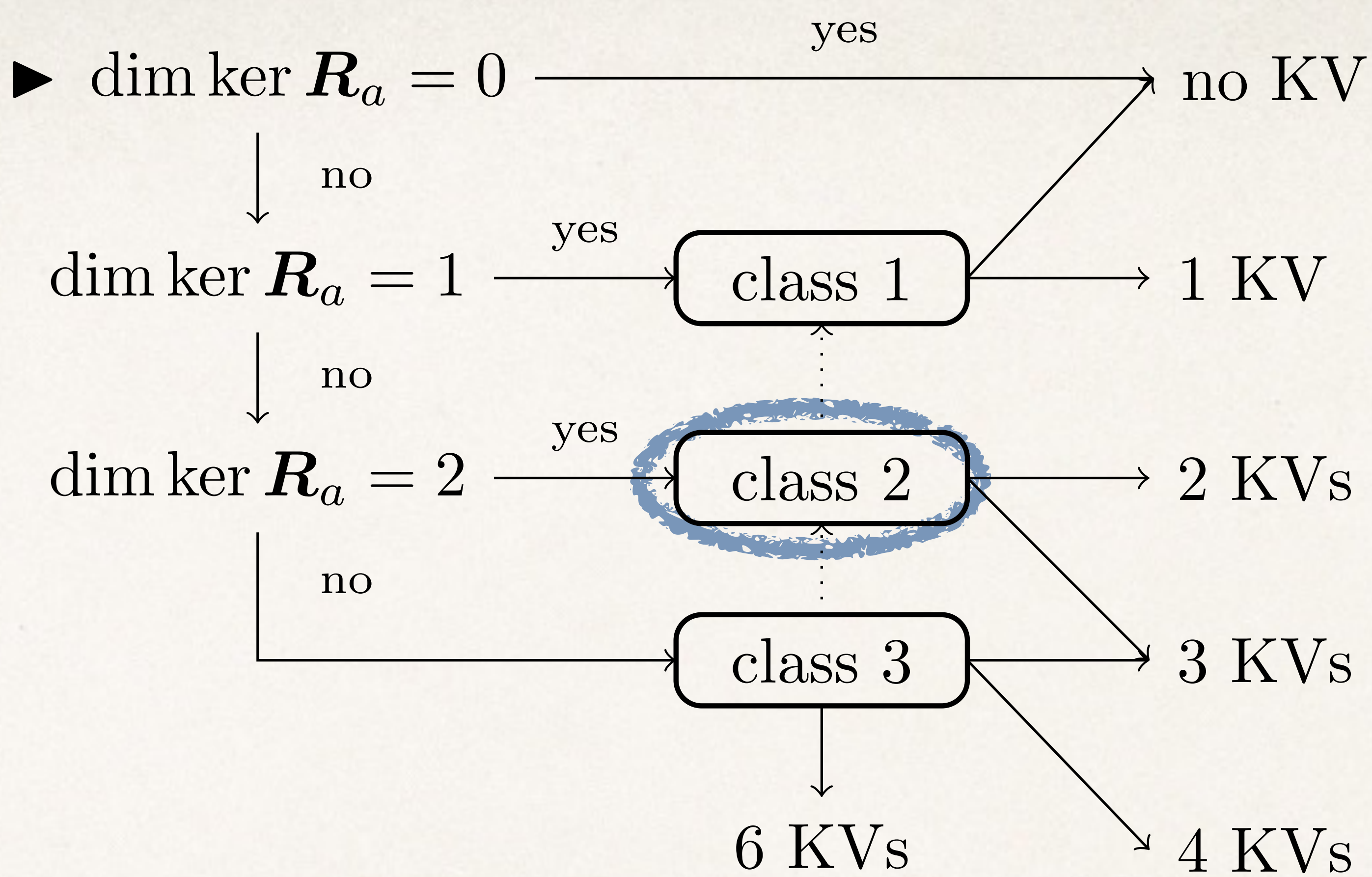
キリング方程式のTT成分

$$\kappa_T \, \omega_N = 0 \longrightarrow \omega_N = 0$$

$\longrightarrow$ $K^a = \omega_B \, B^a$ **class Iへ帰着**



dR is a geodesic
no
case I
yes
τN − τB = 0
no
rankR(4)cs.2
1
0
2 KVs
yes
τN = 0
no
rankR(3)cs.2
2
no KV
yes
κN − κB = 0
no
rankR(2)cs.2
2
1
case I
yes
rankR(1)cs.2
0
3 KVs



class II

$$\dim\ker \boldsymbol{R}_a \; = \; 2$$

$$\text{with} \quad T^b \nabla_b T^a \; = \; 0$$

$dR \neq 0$ とする

$$\{T^a, N^a, B^a\} \ : \ \text{orthonormal frame}$$

Ricci rotation coefficients :

$$T^b\nabla_b \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_T \\ 0 & -\tau_T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix}$$

$$N^b\nabla_b \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_N & \tau_N \\ \kappa_N & 0 & \eta_N \\ -\tau_N & -\eta_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix}$$

$$B^b\nabla_b \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_B & -\kappa_B \\ -\tau_B & 0 & -\eta_B \\ \kappa_B & \eta_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^a \\ N^a \\ B^a \end{pmatrix}$$

キリング方程式を書き下すと…

- $\{\tau_N, \tau_B, \kappa_N - \kappa_B\}$ の値によって解析がさらに分岐
- $\{\tau_N, \tau_B, \kappa_N - \kappa_B\} = \{0, 0, 0\}$ のとき

$$\Rightarrow \quad \{T^a, N^a, B^a\} \text{ is eigensystem of Ric, } R^a{}_b$$

$$\nabla_a \boldsymbol{\omega} \; = \; \boldsymbol{\Omega}_a \, \boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{\omega} \; \equiv \; \begin{pmatrix} \omega_N \\ \omega_B \\ \pounds_N \omega_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_a \; = \; & T_a \begin{pmatrix} -\kappa_N & \tau_T & 0 \\ -\tau_T & -\kappa_N & 0 \\ \eta_N \kappa_N + \pounds_B \kappa_N - \pounds_T \eta_N & -\eta_N \tau_T - \pounds_N \kappa_N & 0 \end{pmatrix} \\ & + N_a \begin{pmatrix} 0 & \eta_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mathcal{L}_N \eta_N & \eta_B^2 - \pounds_B \eta_N - \pounds_N \eta_B & 0 \end{pmatrix} + B_a \begin{pmatrix} -\eta_N & -\eta_B & -1 \\ \eta_B & 0 & 0 \\ \pounds_N \eta_B - \eta_B^2 & \eta_N \eta_B & \eta_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

キリング方程式を書き下すと…

- $\{\tau_N, \tau_B, \kappa_N - \kappa_B\}$ の値によって解析がさらに分岐
- $\{\tau_N, \tau_B, \kappa_N - \kappa_B\} = \{0, 0, 0\}$ のとき

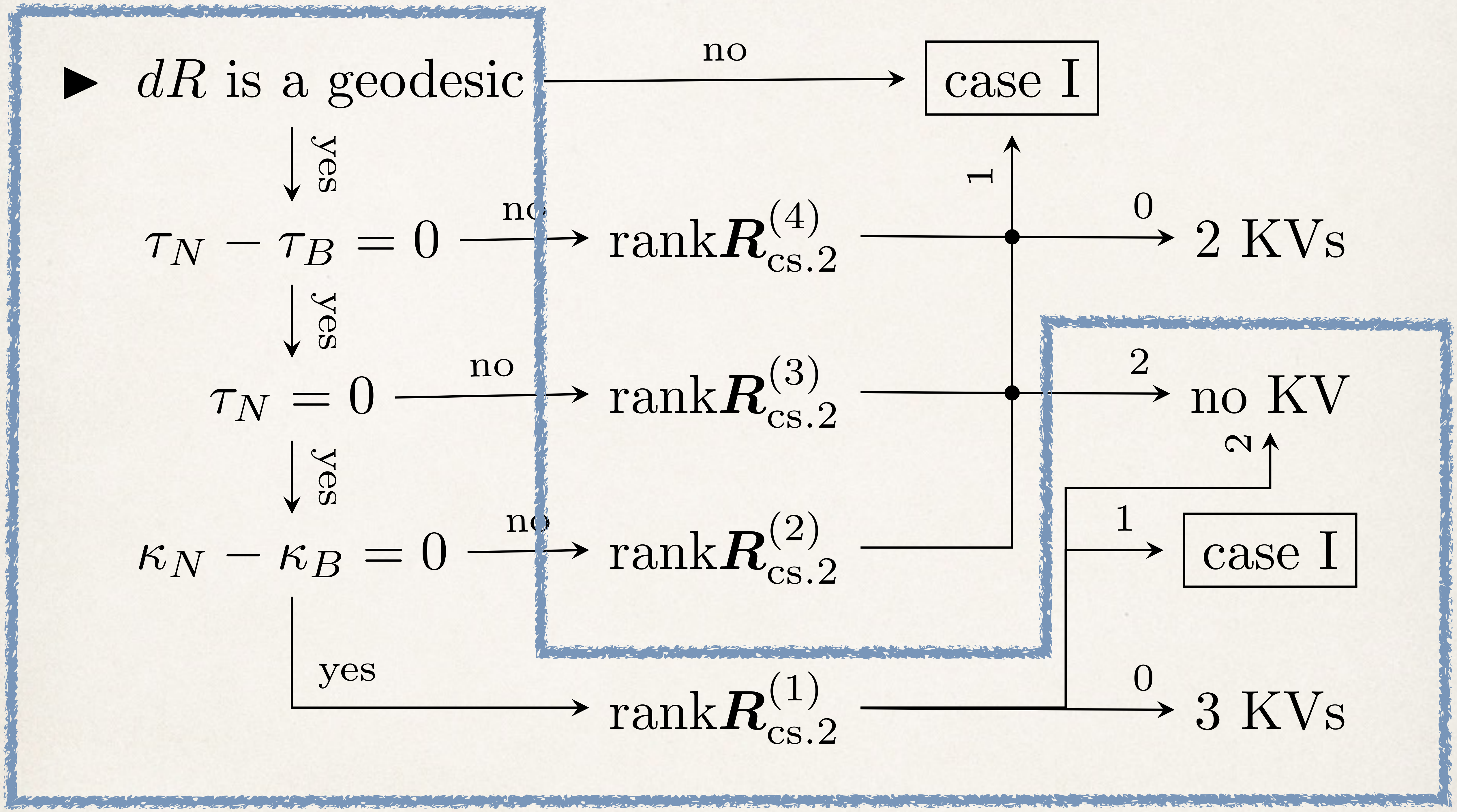
$\Rightarrow \quad \{T^a, N^a, B^a\}$ is eigensystem of Ric, $R^a{}_b$

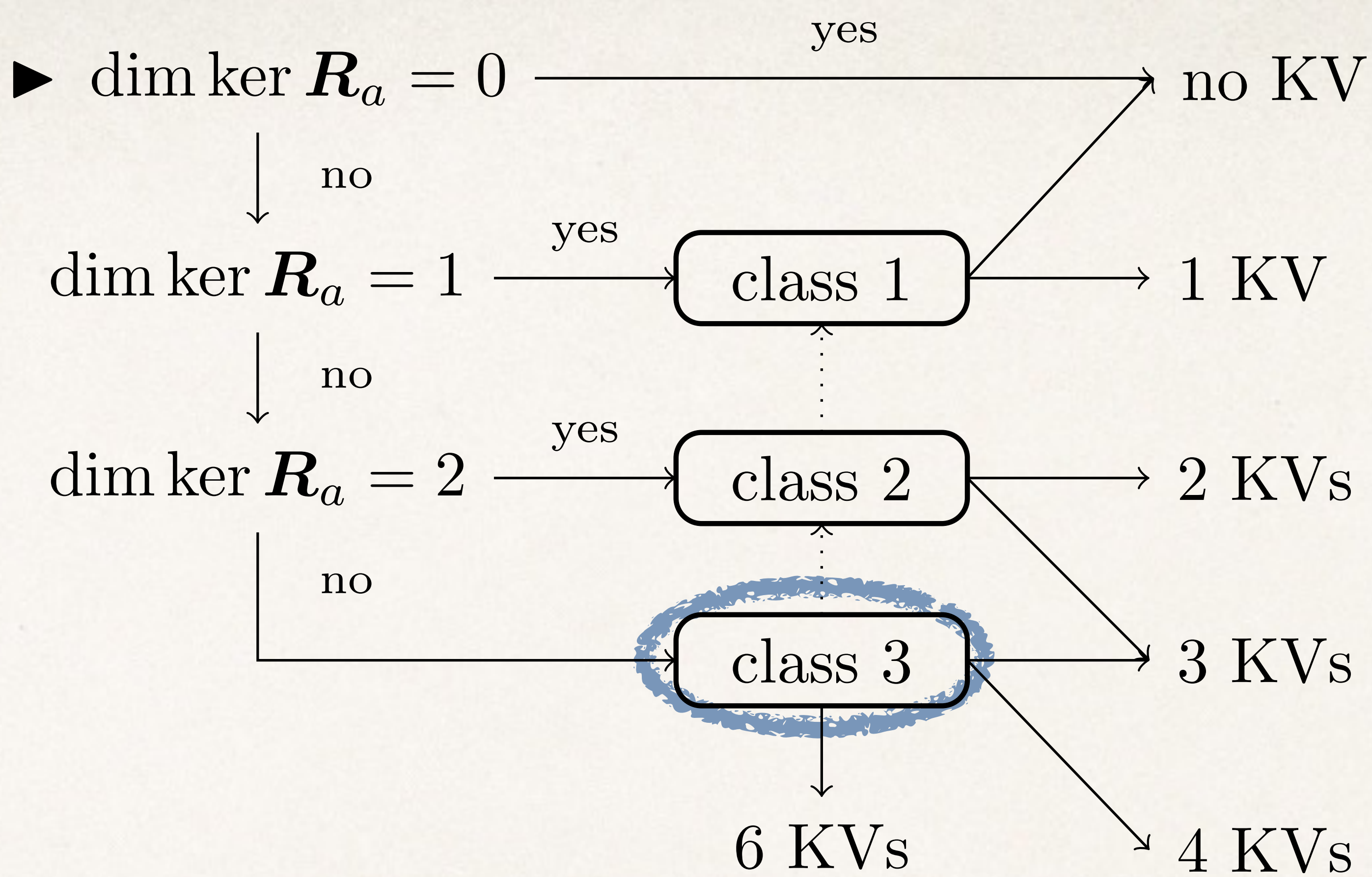
$$(\nabla_{[a}\boldsymbol{\Omega}_{b]} - \boldsymbol{\Omega}_{[a}\boldsymbol{\Omega}_{b]})\boldsymbol{\omega} \;=\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{R}^{(1)}_{\mathrm{cs.2}}\,\boldsymbol{\omega} \;=\; 0$$

$$\boldsymbol{R}^{(1)}_{\mathrm{cs.2}} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \pounds_N \kappa_N & \pounds_B \kappa_N & 0 \\ \pounds_N \lambda_N & \pounds_B \lambda_N & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_N \;\equiv\; R_{ab}N^a N^b$$


dR is a geodesic
yes
no
case I
$\tau_N - \tau_B = 0$
yes
no
$\mathrm{rank}\boldsymbol{R}^{(4)}_{\mathrm{cs}.2}$
1
0
2 KVs
$\tau_N = 0$
yes
no
$\mathrm{rank}\boldsymbol{R}^{(3)}_{\mathrm{cs}.2}$
2
no KV
2
$\kappa_N - \kappa_B = 0$
yes
no
$\mathrm{rank}\boldsymbol{R}^{(2)}_{\mathrm{cs}.2}$
1
case I
$\mathrm{rank}\boldsymbol{R}^{(1)}_{\mathrm{cs}.2}$
0
3 KVs



class III

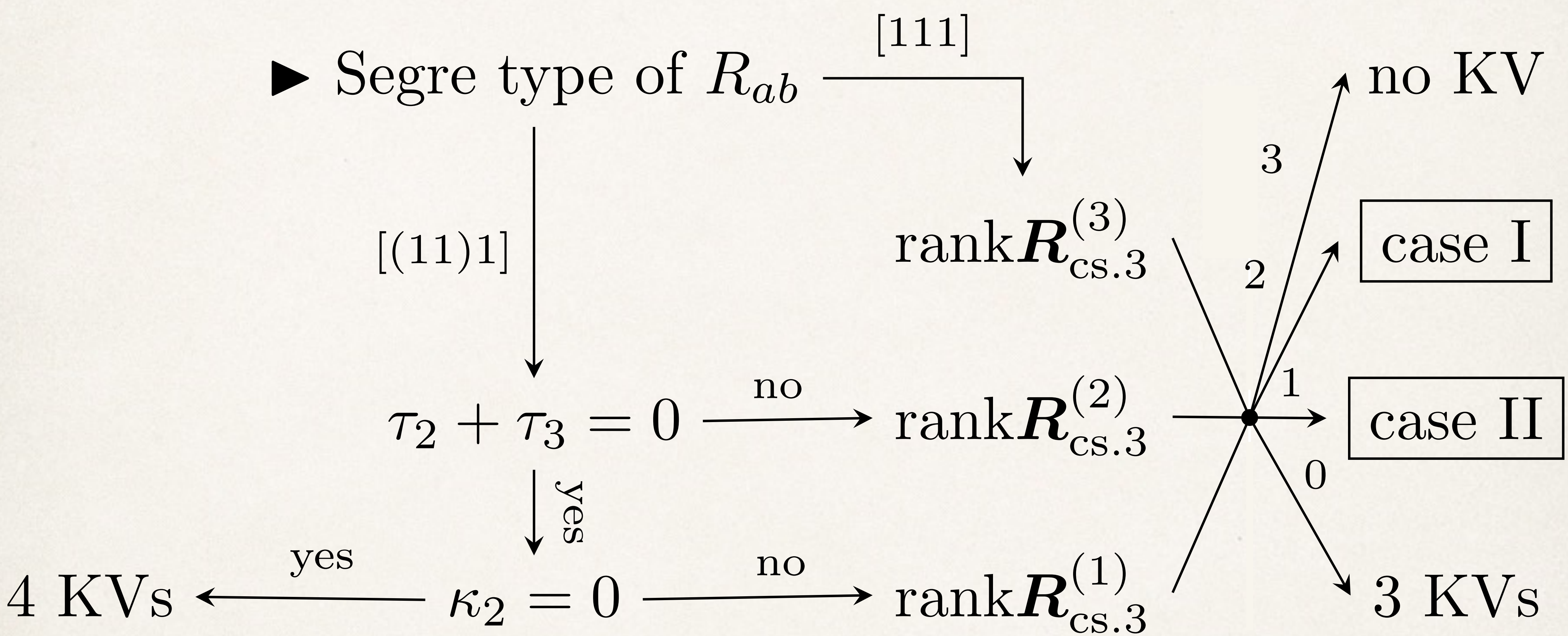
$$\dim\ker \boldsymbol{R}_a = 3$$

詳細は…

arXiv: 1804.11032　（リーマン多様体）

arXiv: 1902.07899　（ローレンツ多様体）

case III のフローチャート



補足

$$A^a{}_b \ : \ N \times N \text{ matrix}$$

$$\{\lambda_i\} \ : \ \text{eigenvalues of } A^a{}_b$$

$$\mathrm{Tr}\, A^a{}_b \ = \ \sum_i^N \lambda_i$$

$$\mathrm{Tr}\, A^a{}_b A^b{}_a \ = \ \sum_i^N \lambda_i^2$$

$$\cdots \ = \ \cdots$$

$$\mathrm{Tr}\, A^a{}_b A^b{}_c \cdots \ = \ \sum_i^N \lambda_i^N$$