実形の交叉

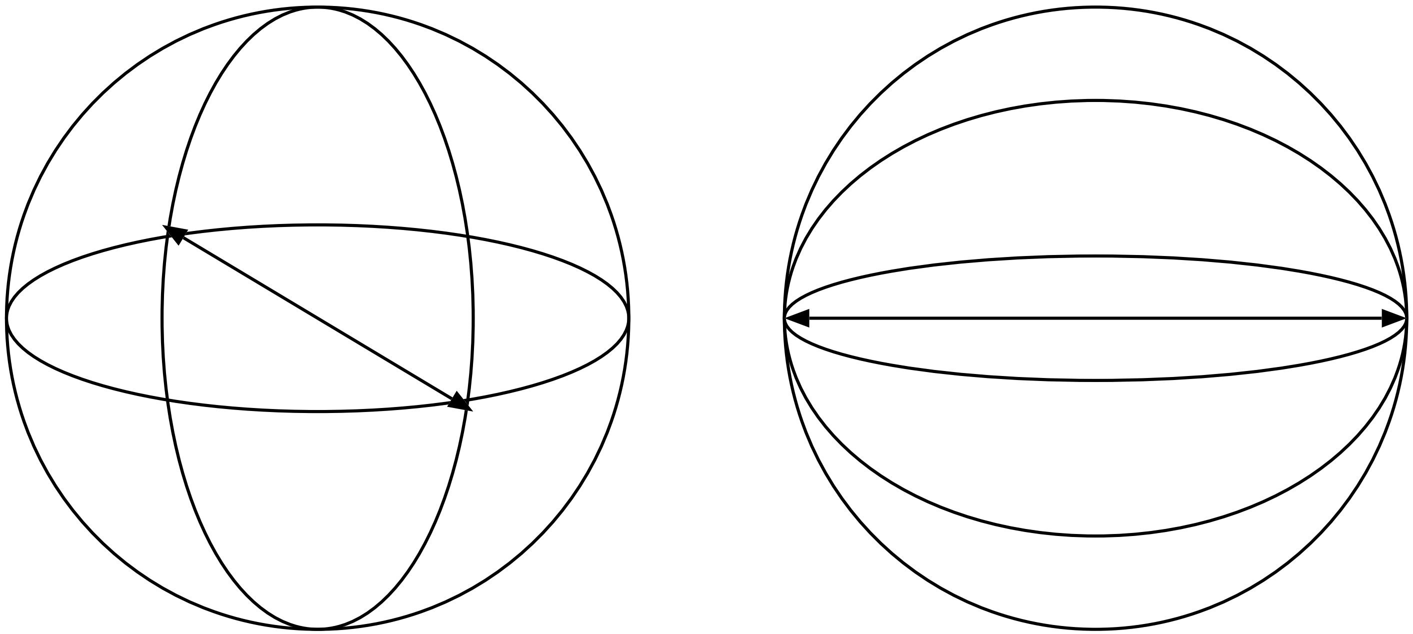
沼津研究会

田崎博之

筑波大学数理物質系

2017年3月6日

大円の交叉



対蹠点の対

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{S}^1 & \subset & \boldsymbol{S}^2 \\
\| & & \| \\
\boldsymbol{P}^1(\mathbb{R}) & \subset & \boldsymbol{P}^1(\mathbb{C}) \\
\| & & \| \\
\mathbf{Ad}(\boldsymbol{SO}(2))\boldsymbol{x}_0 & \subset & \mathbf{Ad}(\boldsymbol{SU}(2))\boldsymbol{x}_0
\end{array}
$$

$\mathbb{R}P^1$ は $\mathbb{C}P^1$ の複素共役写像の不動点集合：実形

$(SU(2), SO(2))$：コンパクト対称対

$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(2) + \mathfrak{p}$：標準分解

$$x_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & \\ & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{p} = \mathbb{R}x_0 + \mathbb{R} \begin{bmatrix} & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & \end{bmatrix}$$

$$A = S(U(1) \times U(1))$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{bmatrix} \middle| z \in U(1) \right\}$$
$$SU(2) = SO(2)ASO(2)$$
$$SU(2) \ni g = k_0 a k_1$$
$$(k_0, k_1 \in SO(2), a \in A)$$
$L = \mathrm{Ad}(SO(2))x_0$ とおく。

$$L \cap \mathrm{Ad}(g)L = \mathrm{Ad}(k_0)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$$

$\mathrm{Ad}(a)$ の作用は $\mathbb{R}x_0$ を軸とする回転であり、L を保たなければ $L \cap \mathrm{Ad}(a)L = \{\pm x_0\}$.

$(SU(n+1), SO(n+1))$：コンパクト対称対

$\mathfrak{su}(n+1) = \mathfrak{so}(n+1) + \mathfrak{p}$：標準分解

$\mathfrak{p} = \sqrt{-1}\{X \mid X$：実対称行列 $\mathrm{tr}X = 0\}$

$$x_0 = \sqrt{-1}\begin{bmatrix} n & \\ & -1_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}$$

$\mathrm{Ad}(SU(n+1))x_0$

$\cong SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)) \cong \mathbb{C}P^n$

$\mathrm{Ad}(SO(n+1))x_0$

$\cong SO(n+1)/S(O(1) \times O(n)) \cong \mathbb{R}P^n$

これらを同一視する。

$\mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{C}P^n$ の複素共役写像の不動点集合：実形

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_{n+1} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} z_1, \ldots, z_{n+1} \in U(1) \\ z_1 \cdots z_{n+1} = 1 \end{array} \right\}$$

o : コンパクト対称空間 $SU(n+1)/SO(n+1)$ の原点

Ao : $SU(n+1)/SO(n+1)$ の極大トーラス

対称空間の一般論より

$$SU(n+1)/SO(n+1) = \bigcup_{k \in SO(n+1)} kAo$$

したがって、$SU(n+1) = SO(n+1)ASO(n+1)$.

$$SU(n+1) \ni g = k_0 a k_1$$

$$(k_0, k_1 \in SO(n+1), a \in A)$$

$L = \mathbb{R}P^n = \mathrm{Ad}(SO(n+1))x_0$ とおく。

$$L \cap \mathrm{Ad}(g)L = \mathrm{Ad}(k_0)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$$

$L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を調べることは、$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ を調べることに帰着。

交叉を記述する概念の導入

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : x に関する点対称 $x \in M$

定義 (Chen-Nagano 1988)

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: 集合 S の元の個数

$\#_2 M$: M の 2-number

$= \sup\{|S| \mid S$ は対蹠集合 $\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$G_k(\mathbb{K}^n)$: Grassmann 多様体

$\{v_i\}$: $\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底

$\Rightarrow \{\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle_{\mathbb{K}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$

: $G_k(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_k(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{k}$$

これは $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の総和

(Grassmann 多様体やコンパクト型 Hermite 対称空間を含む対称 R 空間のクラスで成立。)

Kähler 多様体内

τ：対合的反正則等長変換

$\mathrm{Fix}(\tau)$ の連結成分：実形

Kähler 形式はシンプレクティック構造を定める

実形は全測地的 Lagrange 部分多様体

Hermite 対称空間は Kähler 多様体

複素射影空間内の実射影空間は実形

定理 1(T. 2010)　M ： 複素二次超曲面

L_0, L_1 ： M の実形

$L_0 \cap L_1$ ： 離散的

$\Rightarrow L_0 \cap L_1$ ： 対蹠集合

定理 2(Tanaka-T. 2012)

M ： コンパクト型 Hermite 対称空間

L_0, L_1 ： M の実形

$L_0 \cap L_1$ ： 離散的

$\Rightarrow L_0 \cap L_1$ ： 対蹠集合

定理3(Ikawa-Tanaka-T. 2015)

M ： 既約コンパクトHerm. 対称空間

L_0, L_1 ： M の実形

$L_0 \cap L_1$ ： 離散的

$\Leftrightarrow$ 対称三対による条件

この場合

$L_0 \cap L_1$ ： M の対蹠集合、

ある種のWeyl群の軌道、二点等質

コンパクト型 Hermite 対称空間は、コンパクト Lie 群の随伴軌道 $M = \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$ になることを利用する。

(G, K_i) : L_i を定める対称対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i$: 対応する標準分解、$x_0 \in \mathfrak{p}_i$

$\mathfrak{a}$: x_0 を含む $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 内の極大可換部分空間

o : G/K_1 の原点、Hermann の結果より

$$G/K_1 = \bigcup_{k \in K_0} k \exp \mathfrak{a} o$$

したがって、$G = K_0 \exp \mathfrak{a} K_1$.

$$G \ni g = k_0 a k_1$$

$$(k_0 \in K_0, k_1 \in K_1, a \in A)$$

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(g) L_1 = \mathrm{Ad}(k_0)(L_0 \cap \mathrm{Ad}(a) L_1)$$

$L_0 \cap \mathrm{Ad}(g) L_1$ を調べることは、
$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a) L_1$ を調べることに帰着。

対称三対 $\Rightarrow$ $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a) L_1$ が離散的になるための必要十分条件

$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a) L_1$: 離散的 $\Rightarrow$ 対蹠集合、ある種の Weyl 群の二点等質な軌道

定理 4(Iriyeh-Sakai-T. 2013)

M ： 既約コンパクト型 Hermite 対称空間

L_0, L_1 ： M の実形

$L_0 \cap L_1$ ： 離散的 $\Rightarrow$ Floer ホモロジー

$$HF(L_0, L_1) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

生成系 $L_0 \cap L_1$ の鎖複体、正則写像の個数から定まる境界作用素によるホモロジー

$L_0 \pitchfork L_1$, ϕ : M の Hamilton 変形

$|L_0 \cap \phi(L_1)| \geq \mathrm{rank} HF(L_0, L_1) = |L_0 \cap L_1|$

ある例外を除いて

$$|L_0 \cap L_1| = \min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}$$

(L_i : 対称 R 空間 $\Rightarrow$ $\#_2 L_i$: $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の総和)

上記不等式と積分幾何学の応用例
複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の Hamilton 変形 ϕ と
実形 S^n に対して

$$\mathrm{vol}(\phi(S^n)) \geq \mathrm{vol}(S^n)$$

コンパクト Lie 群の随伴軌道：複素旗多様体

$$M = \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

(G, K)：コンパクト対称対、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$

$L = \mathrm{Ad}(K)x_0$：実旗多様体 $\quad (x_0 \in \mathfrak{p})$

M : G 不変 Kähler 計量が存在、
L : M の実形

コンパクト型 Hermite 対称空間の成果を複素旗多様体の場合に拡張中
(Ikawa-Iriyeh-Okuda-Sakai-T.)