ルジャンドル曲線の１パラメータ族と包絡線

第２３回　沼津研究会

——幾何、数理物理、そして量子論——

沼津工業高等専門学校

２０１６年３月７日（月）～３月９日（水）

高橋　雅朋（**Masatomo Takahashi**）

室蘭工業大学（**Muroran Institute of Technology**）

包絡線 $\cdots$「曲線の１パラメータ族の包絡線は、この族すべての曲線に【接する】曲線である」とあるが、この接するの意味が曖昧である。正則曲線に対しては問題ないが、特異点を持つ場合、そのまま同じ定義を用いると包絡線の意味合いが良く分からなくなる。（つまり、特異点集合も拾ってくる。）

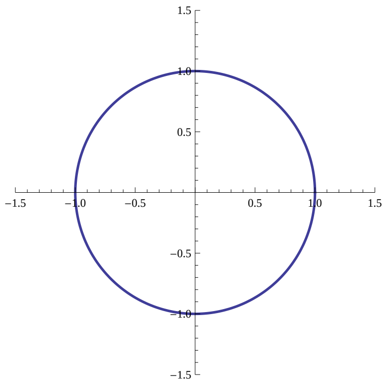
そこで、接線（法線）が定義されるクラスであるルジャンドル曲線に対して定義を行い、ルジャンドル曲線論を用いることとで、うまく理論が回り様々な例が作れるようになることを紹介する。扱うクラスは全て C^∞ 級とする。

主な参考文献：

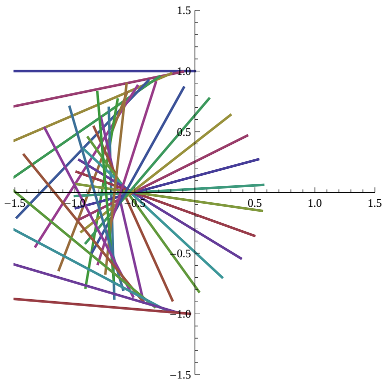
[1] **J.W. Bruce and P.J. Giblin, What is an envelope? The Mathematical Gazette. Vol.65 (1981), 186–192.**

[2] **C.G. Gibson, Elementary Geometry of Differentiable Curves. Cambridge University Press, Cambridge, (2001).**

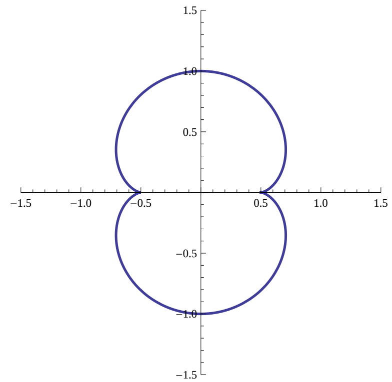
例（円の光（直線）の反射による包絡線）：



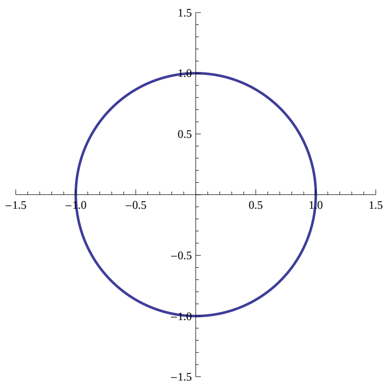
円



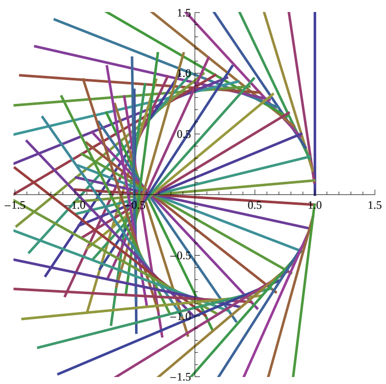
円の右無限大からの光線の反射



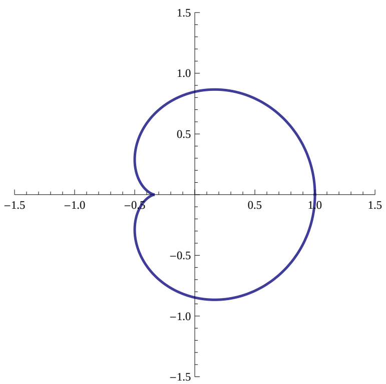
ネフィロイド



円

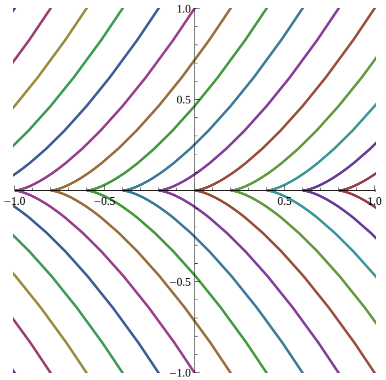


$(1,0)$ からの光線の反射

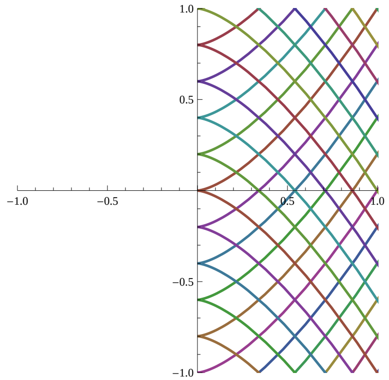


カージオイド

今回の本質的な図：



例１．x軸にカスプ



例２．y軸にカスプ

１．古典的な平面曲線族の包絡線
２．ルジャンドル曲線
３．ルジャンドル曲線族
４．ルジャンドル曲線族の包絡線
５．双ルジャンドル曲線族と包絡線

1．古典的な平面曲線族の包絡線：

● 陰関数表示された曲線族の包絡線：

$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{C}^{\infty}$ 級関数
$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}) := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{V} | \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}\}$、$\{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda})\}_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}}$ を曲線族と呼ぶ。

定義（[1] J.W.Bruce-P.J.Giblin）：

$\boldsymbol{E}_1 := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{V} | \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}\}$

$$\boldsymbol{E}_2 := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{V} | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{n \to \infty} (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n), (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) \in \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cap \boldsymbol{\Gamma}(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_n), \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{\lambda}_n = \lim_{n \to \infty} \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_n = \boldsymbol{\lambda}\}$$

$\boldsymbol{E}_3 := \{(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\lambda})) \in \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}) | (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\lambda}))$ における $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda})$ の接ベクトルは一次従属$\}$

$F(x,y,\lambda) = F_\lambda(x,y,\lambda) = 0$ のとき λ に関して $(x,y) \in E_1$ という。
ここでは E_1, E_3 に注目すると、

命題（[1] J.W.Bruce-P.J.Giblin）（E_1 と E_3 の関係）

(1) $E_3 \subset E_1$

(2) $(x,y) \in \Gamma(\lambda)$，$(x,y) \in E_1$ となる $\forall (x,y,\lambda) \in V \times \Lambda$ に対し、

$$\det \begin{pmatrix} F_x(x,y,\lambda) & F_y(x,y,\lambda) \\ F_{x\lambda}(x,y,\lambda) & F_{y\lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} \neq 0, F_{\lambda\lambda}(x,y,\lambda) \neq 0$$

ならば、$E_1 \subset E_3$

- パラメータ表示された曲線族の包絡線：

$I, \Lambda, U \subset \mathbb{R}$ を区間とし、$\gamma : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2, (t,\lambda) \mapsto \gamma(t,\lambda) : C^\infty$ 級写像、γ を曲線族と呼ぶ。

- C^∞ 級写像 $e_p : U \to \Lambda \times I, u \mapsto e_p(u) = (\lambda(u), t(u))$：正則

- $E_P = \gamma \circ e_p : U \to \mathbb{R}^2, u \mapsto E_P(u) = \gamma(t(u), \lambda(u))$

定義（[2] C.G.Gibson）:
E_P が γ の包絡線（e_p が γ のプレ包絡線） $\Longleftrightarrow$
(1)【変化性】$\lambda : U \to \Lambda$ は U の任意の部分区間で定数ではない。つまり、$\lambda'(u) \neq 0$ となる点は稠密。
(2)【接条件】 $\forall u \in U$ に対し、$E'(u)$ と $\gamma_t(t(u), \lambda(u))$ が一次従属となる。

定義：曲線族 $\gamma : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2, (t, \lambda) \mapsto \gamma(t, \lambda)$ に対し，γ の特異点集合を $S(\gamma) = \{(t, \lambda) \in I \times \Lambda | \det(\gamma_t, \gamma_\lambda)(t, \lambda) = 0\}$ とする。

定理（[2] C.G.Gibson）（包絡線定理）

$e_p : U \to \Lambda \times I$ は変化性を満たすとする。e_p が γ のプレ包絡線（つまり、$E_P = \gamma \circ e_p$ が γ の包絡線）$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall u \in U$ に対して $e_p(u) \in S(\gamma)$.

例 1（x 軸にカスプを乗せる）：

- $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x, y, \lambda) = (x-\lambda)^3 - y^2$. $F_\lambda(x, y, \lambda) = -3(x-\lambda)^2$, $F = F_\lambda = 0$ より $E_1 = \{(\lambda, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t, \lambda) = (t^2 + \lambda, t^3)$. $\det(\gamma_t, \gamma_\lambda)(t, \lambda) = -3t^2$. 包絡線定理より、プレ包絡線は $e_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, e_p(u) = (0, u)$ で $E_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, E_P(u) = (u, 0)$.

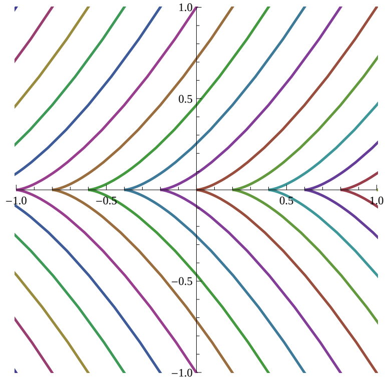
つまり、両方とも包絡線は x 軸で与えられる。

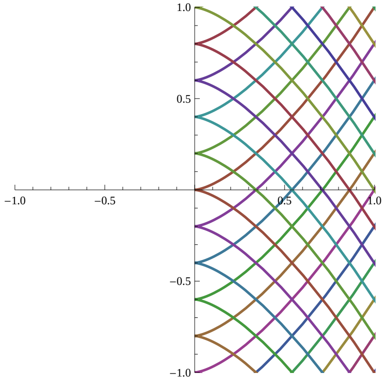
例２（y 軸にカスプを乗せる）：

● $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x, y, \lambda) = x^3 - (y - \lambda)^2$. $F_\lambda(x, y, \lambda) = -2(y - \lambda)$, $F = F_\lambda = 0$ より $E_1 = \{(0, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

● $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t, \lambda) = (t^2, t^3 + \lambda)$ $\det(\gamma_t, \gamma_\lambda)(t, \lambda) = 2t$. 包絡線定理より、プレ包絡線は $e_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, e_p(u) = (0, u)$ で $E_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, E_P(u) = (0, u)$.

つまり、両方とも包絡線は y 軸で与えられる。





例１．x 軸にカスプ　　　例２．y 軸にカスプ

しかし接線の極限、法線の観点、あるいは微分方程式の観点から言えば、

例１は x 軸を包絡線として認めたい。例２は y 軸を包絡線として認めたくない。今までの理論では区別出来ないので、ルジャンドル曲線論の応用の１つとして包絡線を適切に定義し、区別することを目論む。その上で、包絡線の性質について考察する。

２．ルジャンドル曲線：

定義：$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線 $\iff \dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0, {}^\forall t \in I$
$\iff (\gamma, \nu)^* \theta = 0$. ここで θ は $T_1\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ 上の標準的な接触形式。

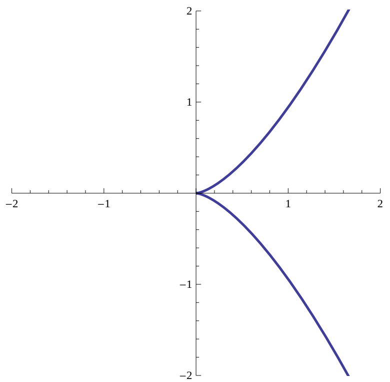
定義：$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ がフロンタル $\iff \nu : I \to S^1 : C^\infty$ が存在して (γ, ν) がルジャンドル曲線となる。

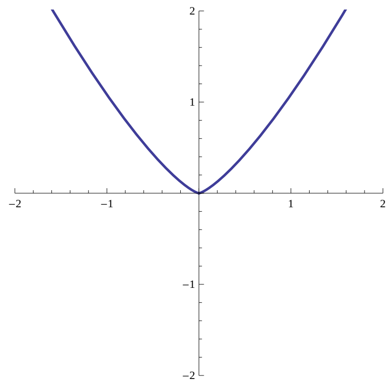
例１（正則曲線）： $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$: 正則曲線に対して、$\nu : I \to S^1$ を $\nu(t) = n(t)$ とすれば、(γ, ν) : ルジャンドル曲線になる。よって、γ はフロンタルである。

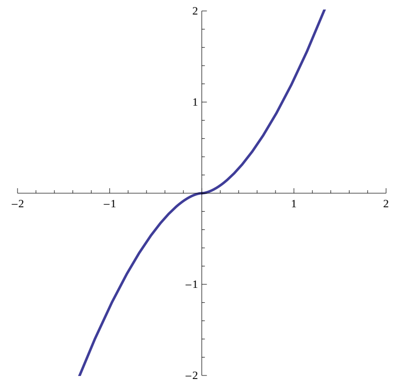
例２（(m, n) カスプ、$m < n = m + k$）： $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{m} t^m, \frac{1}{n} t^n \right)$$

とする。$\nu : \mathbb{R} \to S^1$ を $\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2k}+1}}(-t^k, 1)$ とすれば (γ, ν) はルジャンドル曲線である。







$(2,3)$ カスプ $\gamma(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$ $(3,4)$ カスプ $\gamma(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{4}t^4)$ $(3,5)$ カスプ $\gamma(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{5}t^5)$

ルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ に対して、$\mu(t) := J(\nu(t))$ とする。J は反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転である。このとき $\{\nu(t), \mu(t)\}$ は $\gamma(t)$ の動標構なる。

- フルネ型の公式：$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$,

ここで、$\ell(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)$ である。

- $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$ なので $\beta : I \to \mathbb{R} : C^\infty$ が存在して $\dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)$ となる。

定義：$(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\ell(t), \beta(t))$ をルジャンドル曲線の曲率と呼ぶ。

注意：t_0 が γ の特異点 $\iff$ $\beta(t_0) = 0$ である。

定義：$(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線に対して、$(\gamma, \nu)$ と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ がルジャンドル曲線として合同

$\iff$ $\mathbb{R}^2$ の回転行列 $A \in SO(2)$ とベクトル $a \in \mathbb{R}^2$ が存在して、

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + a, \quad \widetilde{\nu}(t) = A(\nu(t)) \quad ({}^\forall t \in I).$$

定理（ルジャンドル曲線の存在性）

C^∞ 写像 $(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2$ に対して、(ℓ, β) を曲率とするようなルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が存在する。

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(-\int \beta(t) \sin\left(\int \ell(t)\ dt\right) dt,\ \int \beta(t) \cos\left(\int \ell(t)\ dt\right) dt\right),\\
\nu(t) &= \left(\cos\left(\int \ell(t)\ dt\right),\ \sin\left(\int \ell(t)\ dt\right)\right).
\end{aligned}$$

定理（ルジャンドル曲線の一意性）

ルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ に対して、曲率 (ℓ, β) と $(\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ が一致しているとする。このとき、(γ, ν) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ はルジャンドル曲線として合同である。（逆も成り立つ。）

３．ルジャンドル曲線族：

定義：$(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線族
$\iff \gamma_t(t,\lambda) \cdot \nu(t,\lambda) = 0, \ {}^\forall(t,\lambda) \in I \times \Lambda.$

$\Longrightarrow$ $\lambda \in \Lambda$ を止めるごとに $(\gamma(\cdot,\lambda), \nu(\cdot,\lambda)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線である。

- $\mu(t,\lambda) = J(\nu(t,\lambda))$ とすると、$\{\nu(t,\lambda), \mu(t,\lambda)\}$ は $\gamma(t,\lambda)$ の動標構である。

- フルネ型の公式：

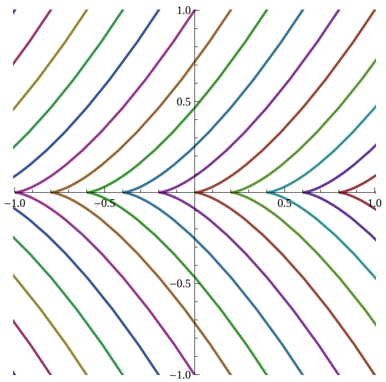
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \nu_t(t,\lambda) \\ \mu_t(t,\lambda) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \ell(t,\lambda) \\ -\ell(t,\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t,\lambda) \\ \mu(t,\lambda) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \nu_\lambda(t,\lambda) \\ \mu_\lambda(t,\lambda) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & m(t,\lambda) \\ -m(t,\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t,\lambda) \\ \mu(t,\lambda) \end{pmatrix}, \\
\gamma_t(t,\lambda) &= \beta(t,\lambda)\mu(t,\lambda).
\end{aligned}$$

ここで、

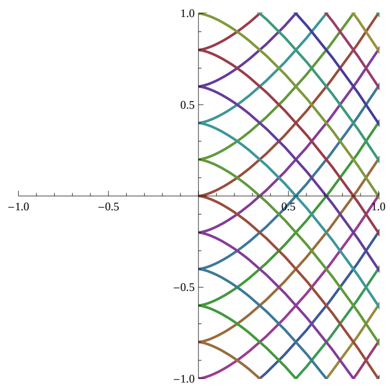
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{\nu}_{t}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{m}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{\nu}_{\lambda}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{\gamma}_{t}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}$$

- 可積分条件より任意の$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\in\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\Lambda}$に対して$\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})$を満たす。

定義:可積分条件を満たす$(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{\beta}):\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}^{3}$のことをルジャンドル曲線族$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$の曲率という。



例１． $\boldsymbol{x}$軸にカスプ



例２． $\boldsymbol{y}$軸にカスプ

例1（x軸にカスプを乗せる）：$(\gamma,\nu):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\times S^1$を

$$\gamma(t,\lambda)=(t^2+\lambda,t^3),\nu(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-3t,2).$$

$\gamma_t(t,\lambda)=(2t,3t^2)$より$\gamma_t(t,\lambda)\cdot\nu(t,\lambda)=0.$　(γ,ν)はルジャンドル曲線族で$\mu(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-2,-3t)$より曲率は$(\ell(t,\lambda),m(t,\lambda),\beta(t,\lambda))=(\frac{1}{6(4+9t^2)},0,-t\sqrt{4+9t^2})$である。

例2（y軸にカスプを乗せる）：$(\gamma,\nu):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\times S^1$を

$$\gamma(t,\lambda)=(t^2,t^3+\lambda),\nu(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-3t,2).$$

$\gamma_t(t,\lambda)=(2t,3t^2)$より$\gamma_t(t,\lambda)\cdot\nu(t,\lambda)=0.$　(γ,ν)はルジャンドル曲線族で$\mu(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-2,-3t)$より曲率は$(\ell(t,\lambda),m(t,\lambda),\beta(t,\lambda))=(\frac{1}{6(4+9t^2)},0,-t\sqrt{4+9t^2})$である。

定義 : $(\gamma,\nu),(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}):I\times\Lambda\to\mathbb{R}^2\times S^1$: ルジャンドル曲線族に対して、$(\gamma,\nu)$ と $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})$ がルジャンドル曲線族として合同 $\iff$ $\mathbb{R}^2$ 上の回転行列 $A\in SO(2)$ と $a:\Lambda\to\mathbb{R}^2:C^\infty$ が存在して、

$$\widetilde{\gamma}(t,\lambda)=A(\gamma(t,\lambda))+a(\lambda),\qquad \widetilde{\nu}(t,\lambda)=A(\nu(t,\lambda)).$$

定理（ルジャンドル曲線族の存在性）

可積分条件を満たす C^∞ 級写像 $(\ell,m,\beta):I\times\Lambda\to\mathbb{R}^3$ に対して、曲率が (ℓ,m,β) となるルジャンドル曲線族 $(\gamma,\nu):I\times\Lambda\to\mathbb{R}^2\times S^1$ が存在する。

$(t_0,\lambda_0)\in I\times\Lambda$: 固定する。$\theta(t,\lambda):=\int_{t_0}^t\ell(t,\lambda)dt+\int_{\lambda_0}^\lambda m(t_0,\lambda)d\lambda$ とする。$\Longrightarrow$ 可積分条件より $\theta_t(t,\lambda)=\ell(t,\lambda),\theta_\lambda(t,\lambda)=m(t,\lambda)$.

$$\begin{aligned}\gamma(t,\lambda)&=\left(-\int\beta(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)dt,\int\beta(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)dt\right),\\ \nu(t,\lambda)&=(\cos\theta(t,\lambda),\sin\theta(t,\lambda)).\end{aligned}$$

定理（ルジャンドル曲線族の一意性）

ルジャンドル曲線族 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}), (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ に対して曲率 $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ とする。$(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ は一致しているとする。このとき、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ はルジャヤンドル曲線族として合同である。（逆も成り立つ。）

４．ルジャンドル曲線族の包絡線：

$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$: ルジャンドル曲線族で曲率を $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta})$ とする。

- $\boldsymbol{e_L} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{e_L}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{u}))$: $\boldsymbol{C}^\infty$ 曲線とする。
- $\boldsymbol{E_L} = \boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{e_L} : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{E_L}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{e_L}(\boldsymbol{u})$ とする。

注意： $\boldsymbol{e_L}$ は正則曲線とは仮定しない。

定義：$\boldsymbol{E_L}$がルジャンドル曲線族$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$の包絡線 $\boldsymbol{(e_L}$がプレ包絡線$\boldsymbol{)} \quad \Longleftrightarrow$
(1)【変化性】 $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{\Lambda}$は$\boldsymbol{U}$の任意の部分区間で定数ではない。つまり、$\boldsymbol{\lambda'(u) \neq 0}$となる点は稠密。
(2)【接条件】 $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$に対し、$\boldsymbol{E'_L(u)}$と$\boldsymbol{\mu(t(u), \lambda(u))}$が一次従属となる。

注意：接条件は$\boldsymbol{E'_L(u) \cdot \nu(e_L(u)) = 0}$, ${}^\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$と同値である。

例１（x軸にカスプを乗せる）：$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$,

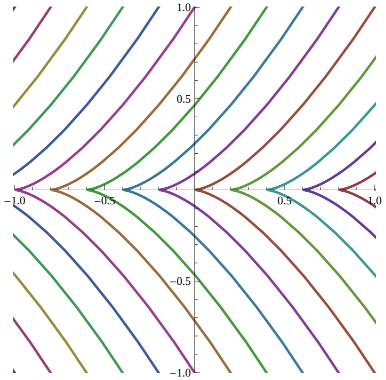
$$\boldsymbol{\gamma(t, \lambda) = (t^2 + \lambda, t^3), \nu(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{4 + 9t^2}}(-3t, 2).}$$

$\boldsymbol{e_L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \boldsymbol{e_L(u) = (t(u), \lambda(u)) = (0, u).} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{E_L(u) = \gamma \circ e_L(u) = (u, 0).}$ $\boldsymbol{\lambda'(u) = 1}$と$\boldsymbol{E'_L(u) \cdot \nu(0, u) = 0}$より$\boldsymbol{E_L}$は$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$の包絡線である。

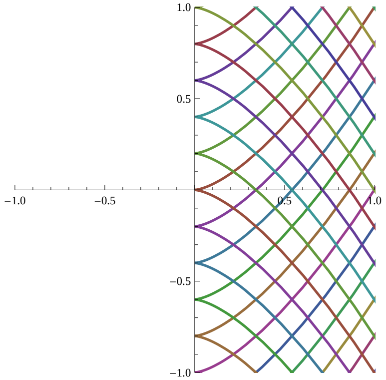
例２（y軸にカスプを乗せる）：$(\gamma,\nu):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\times S^1$,

$$\gamma(t,\lambda)=(t^2,t^3+\lambda),\nu(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-3t,2).$$

$e_L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, e_L(u)=(t(u),\lambda(u))=(0,u).\implies E_L(u)=\gamma\circ e_L(u)=(0,u)$, $\lambda'(u)=1$. $E_L'(u)\cdot\nu(0,u)=1\neq 0$より$E_L$は$(\gamma,\nu)$の包絡線ではない。



例１．x軸にカスプ



例２．y軸にカスプ

命題（ルジャンドル曲線族の包絡線の曲率）

ルジャンドル曲線族 $(\gamma,\nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ の曲率を (ℓ, m, β) とする。$e_L : U \to I \times \lambda$ はプレ包絡線で $E_L = \gamma \circ e_L : U \to \mathbb{R}^2$ は包絡線とする。このとき E_L はフロンタルである。$(E_L, \nu \circ e_L) : U \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線で曲率は

$$
\begin{aligned}
\ell_E(u) &= t'(u)\ell(e(u)) + \lambda'(u)m(e(u)), \\
\beta_E(u) &= t'(u)\beta(e(u)) + \lambda'(u)\gamma_\lambda(e(u)) \cdot \mu(e(u)).
\end{aligned}
$$

定理（ルジャンドル曲線族の包絡線定理）

$(\gamma,\nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線族とし、$e_L : U \to I \times \Lambda : C^\infty$ は変化性を満たす。このとき e_L が (γ,ν) のプレ包絡線（E_L は包絡線）$\Longleftrightarrow$ $\gamma_\lambda(e_L(u)) \cdot \nu(e_L(u)) = 0,\ {}^\forall u \in U.$

例３：$i, j, m, n \in \mathbb{N},\ j = i + h, n = m + k$ と h, k は 1 か互いに素とする。
$(\gamma, \nu) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

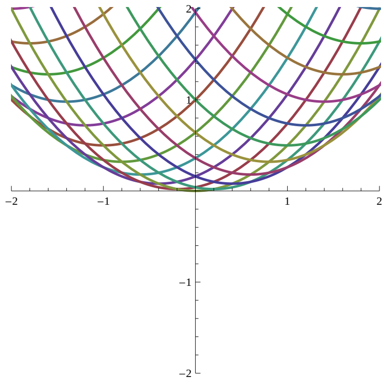
$$\gamma(t, \lambda) = \left(\frac{t^m}{m} + \frac{\lambda^i}{i}, \frac{t^n}{n} + \frac{\lambda^j}{j} \right),\ \nu(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{t^{2k} + 1}} (-t^k, 1).$$

$\gamma_t(t, \lambda) = (t^{m-1}, t^{n-1})$ より $\gamma_t(t, \lambda) \cdot \nu(t, \lambda) = 0\ \ ^\forall(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ なのでルジャンドル曲線族である。さらに $\gamma_\lambda(t, \lambda) = (\lambda^{i-1}, \lambda^{j-1})$ から $\gamma_\lambda(t, \lambda) \cdot \nu(t, \lambda) = (\lambda^{i-1}/\sqrt{t^{2k} + 1})(-t^k + \lambda^h)$.
$e_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, e(u) = (u^h, u^k)$ とすると変化性を満たし、

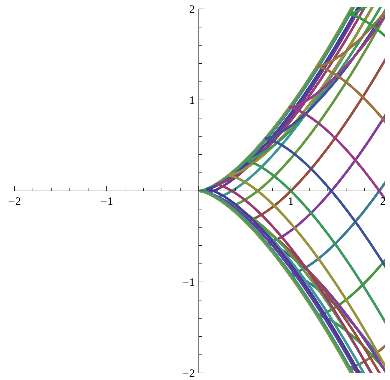
$$\gamma_\lambda(e_L(u)) \cdot \nu(e_L(u)) = \frac{u^{k(i-1)}}{\sqrt{u^{2kh} + 1}} (-u^{hk} + u^{hk}) = 0.$$

よって$\boldsymbol{e}$はプレ包絡線で包絡線$(\boldsymbol{E_L}, \boldsymbol{\nu_L}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S^1}$は

$$\boldsymbol{E_L(u) = \left(\frac{u^{mh}}{m} + \frac{u^{ik}}{i}, \frac{u^{nh}}{n} + \frac{u^{jk}}{j}\right), \nu_L(u) = \frac{1}{\sqrt{u^{2kh}+1}}(-u^{kh}, 1).}$$



$\boldsymbol{(m, n, i, j) = (1, 2, 1, 2)}$
$\boldsymbol{\gamma(t, \lambda) = (t + \lambda, \frac{t^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2})}$



$\boldsymbol{(m, n, i, j) = (2, 3, 2, 3)}$
$\boldsymbol{\gamma(t, \lambda) = (\frac{t^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}, \frac{t^3}{3} + \frac{\lambda^3}{3})}$

定義：$\boldsymbol{\Phi : \widetilde{I} \times \widetilde{\Lambda} \to I \times \Lambda}$がパラメータ変換族 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\Phi}$は$\boldsymbol{\Phi(s, k) = (\phi(s, k), \varphi(k))}$の形の微分同相写像である。

命題（パラメータ変換族における包絡線）

$(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線族に対して、プレ包絡線を $e_L : U \to I \times \Lambda$、包絡線を $E_L = \gamma \circ e_L$、パラメータ変換族 $\Phi : \widetilde{I} \times \widetilde{\Lambda} \to I \times \Lambda$ とする。このとき、$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) = (\gamma \circ \Phi, \nu \circ \Phi) : \widetilde{I} \times \widetilde{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線族であり、$\Phi^{-1} \circ e_L : U \to \widetilde{I} \times \widetilde{\lambda}$ はプレ包絡線で E_L は $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ の包絡線である。

命題（包絡線 E_1 と包絡線 E_L の関係性１）

$(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線族とし、$F(x, y, \lambda) = 0$: フロンタルの曲線族であるとする。つまり、$\gamma(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ に対して、$F(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) = 0$ とする。もし E_L が (γ, ν) の包絡線である $\Longrightarrow E_L(U) \subset E_1$ である。

命題（包絡線 E_1 と包絡線 E_L の関係性２）

$(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線族とし、$F(x, y, \lambda) = 0$: フロンタルの曲線族であるとする。つまり、$\gamma(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ に対して、$F(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) = 0$ とする。また、$e_L : U \to I \times \Lambda$ が変化性を満たすとする。もし $e_L(U)$ 上で γ の正則点が稠密、$\lambda(u)$ に関して $E_L(u) = \gamma \circ e_L(u) \in E_1$、$(F_x, F_y)(x(t(u), \lambda(u)), y(t(u), \lambda(u)), \lambda(u)) \neq (0, 0)$, ${}^\forall u \in U \implies E_L$ は (γ, ν) の包絡線である。

包絡線の具体例として２つのルジャンドル曲線を用意する。

- $(p, \nu_p) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$, $p(t) = (p_1(t), p_2(t)), \nu_p(t) = (\nu_{p1}(t), \nu_{p2}(t))$
- $(q, \nu_q) : \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$, $q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda)), \nu_q(\lambda) = (\nu_{q1}(\lambda), \nu_{q2}(\lambda))$

ルジャンドル曲線の曲率をそれぞれ (ℓ_p, β_p), (ℓ_q, β_q) とする。
また、$p(0) = (0, 0), \nu_p(0) = (0, 1)$ とする。

$(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

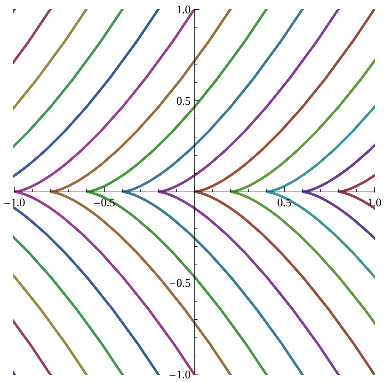
$$\gamma(t,\lambda) = q(\lambda) + A(\theta(\lambda))p(t), \nu(t,\lambda) = A(\theta(\lambda))\nu_p(t),$$

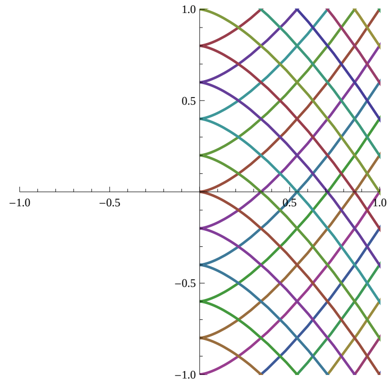
$$A(\theta(\lambda)) = \begin{pmatrix} \cos\theta(\lambda) & -\sin\theta(\lambda) \\ \sin\theta(\lambda) & \cos\theta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ (γ, ν)：ルジャンドル曲線族である。

１．pの法ベクトルとqの法ベクトルを一致するように乗せる。

２．pの法ベクトルをqの接ベクトルに一致するように乗せる。





１．p : $(2,3)$ カスプ、q : 直線　　２．p : $(2,3)$ カスプ、q : 直線

1．$\boldsymbol{p}$の法ベクトルと$\boldsymbol{q}$の法ベクトルを一致するように乗せる。

$$\Longleftrightarrow \ \boldsymbol{\nu}_q(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\lambda}, 0) \Longrightarrow \cos\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \nu_{q2}(\boldsymbol{\lambda}), \sin\theta(\boldsymbol{\lambda}) = -\nu_{q1}(\boldsymbol{\lambda}).$$

$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\lambda}}(t,\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{\lambda}) = -\beta_q(\boldsymbol{\lambda})\nu_{p1}(t) - \ell_q(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}_p(t)$ より

系（法ベクトルが一致するように重ねたときの包絡線）

上の状況で、$\boldsymbol{e}_L : U \to I \times \Lambda$ は変化性を満たし、$\beta_q(\boldsymbol{\lambda}(u))\nu_{p1}(t(u)) + \ell_q(\boldsymbol{\lambda}(u))\boldsymbol{p}(t(u)) \cdot \boldsymbol{\mu}_p(t(u)) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{e}_L$ は (γ, ν) のプレ包絡線である。

注意：常に $\boldsymbol{e}_L(u) = (0, u)$ は (γ, ν) のプレ包絡線である。
つまり、$\boldsymbol{E}_L(u) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\lambda})$ は (γ, ν) の包絡線である。

２． $\boldsymbol{p}$の法ベクトルを$\boldsymbol{q}$の接ベクトルに一致するように乗せる。

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\mu_q(\lambda) = \nu(\lambda, 0) \Longrightarrow \cos\theta(\lambda) = \nu_{q1}(\lambda),\ \sin\theta(\lambda) = \nu_{q2}(\lambda).}$$

$\boldsymbol{\gamma_\lambda(t,\lambda)\cdot\nu(t,\lambda) = \beta_q(\lambda)\nu_{p2}(t) - \ell_q(\lambda)p(t)\cdot\mu_p(t)}$より

系（法ベクトルと接ベクトルが一致するように重ねたときの包絡線）

上の状況で、$\boldsymbol{e_L : U \to I \times \Lambda}$は変化性を満たし、$\boldsymbol{\beta_q(\lambda(u))\nu_{p2}(t(u)) - \ell_q(\lambda(u))p(t(u))\cdot\mu_p(t(u)) = 0 \Longrightarrow e_L}$は$\boldsymbol{(\gamma,\nu)}$のプレ包絡線である。

例４（アステロイドと円）：

- $\boldsymbol{(p,\nu_p) : [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \times S^1,}$

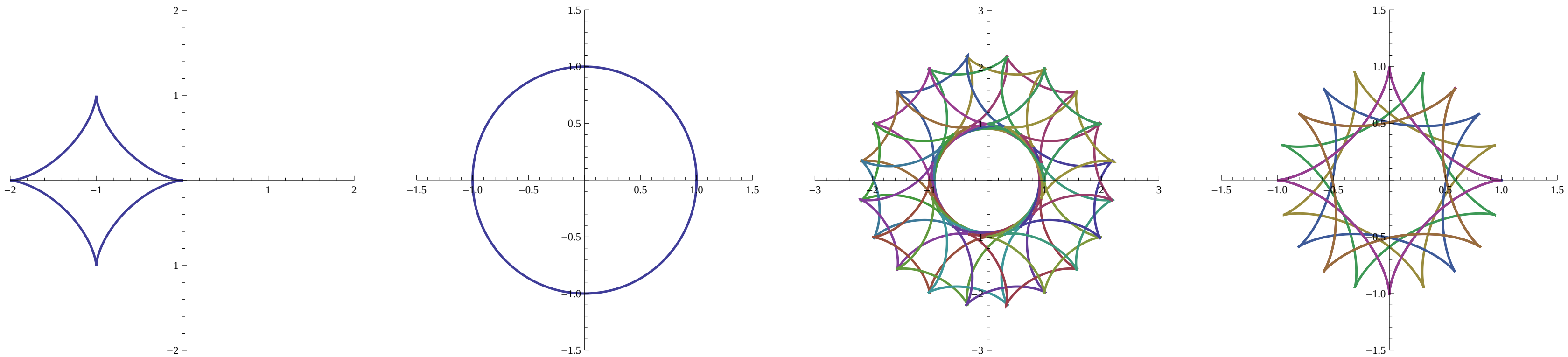
$$\boldsymbol{p(t) = (\cos^3 t - 1, \sin^3 t), \nu_p(t) = (\sin t, \cos t)}$$

- $(q, \nu_q) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$,

$$q(\lambda) = (\cos\lambda, \sin\lambda), \nu_q(\lambda) = (\cos\lambda, \sin\lambda).$$

$\beta_p(t) = 3\cos t \sin t, \ell_p(t) = -1, \beta_q(\lambda) = 1, \ell_q(\lambda) = 1,$
$p(0) = (0, 0),\ \nu_p(0) = (0, 1)$ を満たす。

１．pの法ベクトルとqの法ベクトルを一致するように乗せる。
２．pの法ベクトルをqの接ベクトルに一致するように乗せる。



1． pの法ベクトルとqの法ベクトルを一致するように乗せる。

$$(\gamma, \nu) : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

$$\begin{aligned} \gamma(t, \lambda) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ -\cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^3 t - 1 \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \\ \nu(t, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ -\cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\gamma_\lambda(t, \lambda) \cdot \nu(t, \lambda) = -4\cos(t - (\pi/4))\cos((t/2) - (\pi/4))\sin t/2.$$

- $e_L : [0, 2\pi) \to [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$,

$e_L(u) = (0, u), (3\pi/4, u), (3\pi/2, u), (7\pi/4, u)$ はプレ包絡線。

- $E_L : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$E_L(u) = (\cos u, \sin u), (\sqrt{2}+\frac{1}{2})(\cos(u+\frac{\pi}{4}), \sin(u+\frac{\pi}{4})), (\cos(u+\frac{\pi}{2}), \sin(u+\frac{\pi}{2})), (\sqrt{2}-\frac{1}{2})(\cos(u+\frac{\pi}{4}), \sin(u+\frac{\pi}{4}))$ は包絡線。

２．pの法ベクトルをqの接ベクトルに一致するように乗せる。

$(\gamma, \nu) : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ by

$$\begin{aligned} \gamma(t,\lambda) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^3 t - 1 \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \\ \nu(t,\lambda) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\gamma_\lambda(t,\lambda) \cdot \nu(t,\lambda) = \cos 2t.$

- $e_L : [0, 2\pi) \to [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$,

$e_L(u) = (\pi/4, u), (3\pi/4, u), (5\pi/4, u), (7\pi/4, u)$ はプレ包絡線。

- $E_L : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$E_L(u) = \frac{1}{2}(\cos(u+\frac{\pi}{4}), \sin(u+\frac{\pi}{4})), \frac{1}{2}(\cos(u+\frac{3\pi}{4}), \sin(u+\frac{3\pi}{4})), \frac{1}{2})(\cos(u+\frac{5\pi}{4}), \sin(u+\frac{5\pi}{4})), \frac{1}{2}(\cos(u+\frac{7\pi}{4}), \sin(u+\frac{7\pi}{4}))$ は包絡線。

５．双ルジャンドル曲線族と包絡線：

定義：$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}):\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbb{R}^2\times\boldsymbol{S}^1$ が双ルジャンドル曲線

$\iff\ \boldsymbol{\gamma}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{0},\ {}^\forall(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\in\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\Lambda}.$

$\Longrightarrow\ (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}):\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{t}$ に対してルジャンドル曲線族になる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ -\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}_\lambda(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ \boldsymbol{\mu}_\lambda(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{m}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ -\boldsymbol{m}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\gamma}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),\\
\boldsymbol{\gamma}_\lambda(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
$$

ここで

$$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\nu}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),\ \ \boldsymbol{m}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\nu}_\lambda(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\gamma}_t(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}),\ \ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\gamma}_\lambda(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}).$$

可積分条件より曲率$\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}$は次の条件を満たす：

$$\boldsymbol{\ell_\lambda(t,\lambda) = m_t(t,\lambda), \beta_\lambda(t,\lambda) = \alpha_t(t,\lambda),^\forall (t,\lambda) \in I \times \Lambda}$$

定義：可積分条件を満たす$(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^4$のことを双ルジャンドル曲線族$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$の曲率という。

定義：$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}), (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$：双ルジャンドル曲線に対して、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$と$(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$が双ルジャンドル曲線として合同
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$の回転行列$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{SO}(2)$とベクトル$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$が存在して、

$$\boldsymbol{\widetilde{\gamma}(t,\lambda) = A(\gamma(t,\lambda)) + a,\ \ \widetilde{\nu}(t,\lambda) = A(\nu(t,\lambda)) \quad (^\forall (t,\lambda) \in I \times \Lambda).}$$

定理（双ルジャンドル曲線の存在性）

可積分条件を満たす C^∞ 級写像 $(\ell, m, \beta, \alpha) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^4$ に対して、曲率が (ℓ, m, β, α) となる双ルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が存在する。

$(t_0, \lambda_0) \in I \times \Lambda$. $\theta : I \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $\theta(t,\lambda) = \int_{t_0}^t \ell(t,\lambda)dt + \int_{\lambda_0}^\lambda m(t_0,\lambda)d\lambda$.
$(\phi, \psi) : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
\phi(t,\lambda) &= -\int_{t_0}^t \beta(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)dt - \int_{\lambda_0}^\lambda \alpha(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)d\lambda \\
\psi(t,\lambda) &= \int_{t_0}^t \beta(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)dt + \int_{\lambda_0}^\lambda \alpha(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)d\lambda.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(t,\lambda) &= (\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda)), \\
\nu(t,\lambda) &= (\cos\theta(t,\lambda), \sin\theta(t,\lambda)).
\end{aligned}
$$

定理（双ルジャンドル曲線の一意性）

双ルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}), (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ に対して曲率は $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ とする。$(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ が一致しているとする。このとき、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ は双ルジャンドル曲線として合同である。（逆も成り立つ。）

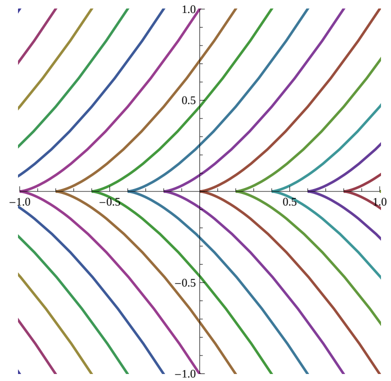
$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}$ より次が成り立つ。

命題（双ルジャンドル曲線の包絡線）

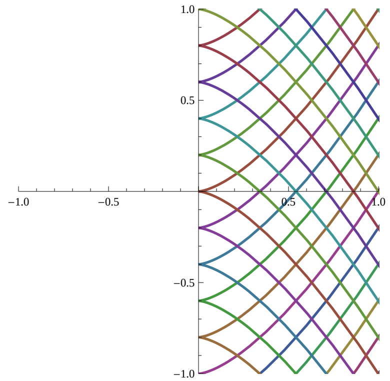
$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$: 双ルジャンドル曲線とする。もし $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{u}))$ が関数 $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ に対して、変化性を満たす。このとき、$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{L}}$ は両方のパラメータ $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ に関して $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ の包絡線である。

結論

特異点を持つ曲線族についても、ルジャンドル曲線族を用いることにより包絡線の（良い）定義を与えることができた。
これにより x 軸にカスプと y 軸にカスプの包絡線を区別することができる。
また、様々な例を作ることができ、新たに双ルジャンドル曲線の概念にも触れた。



x 軸にカスプ



y 軸にカスプ

ご清聴ありがとうございました。