Framed curves and evolutes

枠付き曲線と縮閉線

第２２回　沼津研究集会

２０１５年３月９日（月）～３月１１日（水）

Joint work with 本多　俊一（Shun'ichi Honda）
室蘭工業大学（Muroran Institute of Technology）

高橋　雅朋（Masatomo Takahashi）
室蘭工業大学（Muroran Institute of Technology）

【動機】平面曲線の場合の縮閉線の理論を確立したので、安直に空間曲線の場合も考えてみる。ちなみに２次元の球面や双曲空間、ドシッター空間内の曲線についてもそれぞれに応じて考えられており、異なる性質が空間によりあります。

【内容】

- $\mathbb{R}^3$ 内の正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$
- 正則曲線の縮閉線 $Ev(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$
- 枠付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3,\ (\mathcal{E}v(\gamma), \nu_1^1, \nu_2^1) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$

- $\mathbb{R}^3$内の正則曲線：

$\star$ $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}$:区間, $\gamma : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^3$: 正則（$\dot{\gamma}(t) \neq 0$）かつ独立条件$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$.

$\star$ $\gamma(t)$の動標講（フルネ枠）：

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|},\ \ \boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{t}(t),\ \ \boldsymbol{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}.$$

$\star$ フルネ・セレの公式：

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathrm{t}}(t) \\ \dot{\mathrm{n}}(t) \\ \dot{\mathrm{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 \\ -|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 & |\dot{\gamma}(t)|\tau(t) \\ 0 & -|\dot{\gamma}(t)|\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{t}(t) \\ \mathrm{n}(t) \\ \mathrm{b}(t) \end{pmatrix}.$$

$\star$ 曲率と捩率：

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3},\ \ \tau(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \dddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}.$$

定理（正則曲線の存在性）

$\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}_{>0}, \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$: $\boldsymbol{C}^{\infty}$ 写像に対して、正則曲線 $\gamma : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^3$ が存在して、その曲率と捩率は $\boldsymbol{\kappa}$ と $\boldsymbol{\tau}$ である。

定理（正則曲線の唯一性）

弧長パラメータ表示された正則曲線 $\gamma, \widetilde{\gamma} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\tau}) = (\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}, \widetilde{\boldsymbol{\tau}})$ ならば γ と $\widetilde{\gamma}$ は合同である。

<u>定義</u>　$\gamma, \widetilde{\gamma} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^3$ が合同 $\iff$ $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{SO}(3)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が存在して、任意の $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$ に対して $\widetilde{\gamma}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\gamma(\boldsymbol{t})) + \boldsymbol{b}$ となる。

注意：定義から特異点 $\dot{\gamma}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ と $\dot{\gamma}(\boldsymbol{t}) \times \ddot{\gamma}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ となる点では動標講や曲率を考えることは出来ないので、これらを考えるために【枠付き曲線】を導入する。

- <u>$\mathbb{R}^3$ 内の枠付き曲線</u>：

定義 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$: 枠付き曲線
$\iff \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, \; \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0, \; \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$
このときγを枠付けられた曲線と呼ぶ。

⋆ 枠付けられた曲線$\gamma(t)$の動標講：

$$\nu_1(t), \; \nu_2(t), \; \mu(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t).$$

⋆ フルネ・セレ型の公式：

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

⋆ 枠付き曲線の曲率：

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \; m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \mu(t),$$

$$n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \mu(t), \ \ \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t).$$

定理（枠付き曲線の存在性）

$(\ell, m, n, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4 : C^\infty$ 写像に対して、枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が存在して枠付き曲線の曲率は (ℓ, m, n, α) である。

定理（枠付き曲線の唯一性）

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ に対して $(\ell, m, n, \alpha) = (\widetilde{\ell}, \widetilde{m}, \widetilde{n}, \widetilde{\alpha})$ ならば (γ, ν_1, ν_2) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2)$ は枠付き曲線として合同である。

定義　$(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ が 枠付き曲線として合同

$\iff$ $A \in SO(3)$ と $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3$ が存在して、任意の $t \in I$ に対して

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + b,\ \ \widetilde{\nu}_i(t) = A(\nu_i(t)),\ \ i = 1, 2$$

となる。

注意:$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$:枠付き曲線に対して $t : \widetilde{I} \to I, u \mapsto t(u)$ をパラメータ変換とする。$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2) : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を

$$(\widetilde{\gamma}(u), \widetilde{\nu}_1(u), \widetilde{\nu}_2(u)) = (\gamma \circ t(u), \nu_1 \circ t(u), \nu_2 \circ t(u))$$

とすると曲率の関係は

$$(\widetilde{\ell}(u), \widetilde{m}(u), \widetilde{n}(u), \widetilde{\alpha}(u)) = (\ell(t(u)), m(t(u)), n(t(u)), \alpha(t(u)))t'(u)$$

である。

注意：一般的に $\mathbb{R}^n$ 内の枠付き曲線と曲率が定義できます。

例（独立条件を持つ正則曲線）: $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$: 正則曲線で $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ とする
$\Rightarrow$ フルネ枠 $\{t, n, b\}$ があるので、(γ, n, b) : 枠付き曲線かつ $n(t) \times b(t) = t(t)$.
曲率 $\kappa(t)$ と振率 $\tau(t)$ は次で与えられる。

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{m(t)\dot{n}(t) - \dot{m}(t)n(t) + (m^2(t) + n^2(t))\ell(t)}{\alpha(t)(m^2(t) + n^2(t))}.$$

例（空間曲線 (n_1, n_1, n_3) 型）: $n_1, n_2, n_3, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 = n_1 + k_1, n_3 = n_2 + k_2$ に対して、$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を

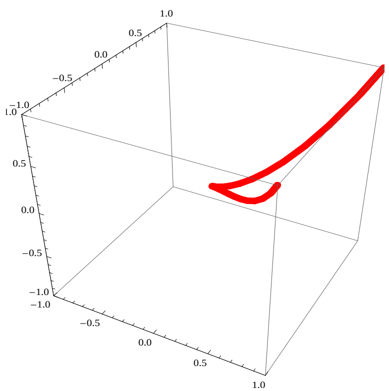
$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(\frac{1}{n_1}t^{n_1}, \frac{1}{n_2}t^{n_2}, \frac{1}{n_3}t^{n_3}\right), \\
\nu_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^{2k_1}}}(-t^{k_1}, 1, 0), \\
\nu_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{(1 + t^{2k_1})(1 + t^{2k_1} + t^{2k_1+2k_2})}}(-t^{k_1+k_2}, -t^{2k_1+k_2}, 1 + t^{2k_1}).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\gamma, \nu_1, \nu_2)$ は枠付き曲線であり $\mu(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^{2k_1}+t^{2k_1+2k_2}}}(1, t^{k_1}, t^{k_1+k_2})$.

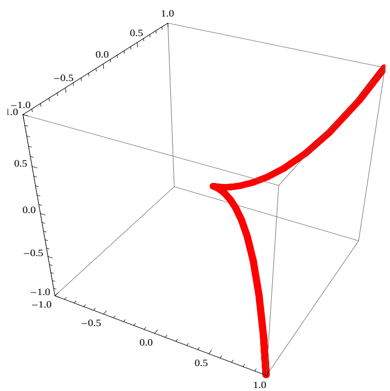
枠付き曲線の曲率は

$$\ell(t) = \frac{k_1 t^{2k_1+k_2-1}}{(1+t^{2k_1})\sqrt{1+t^{2k_1}+t^{2k_1+2k_2}}}, \quad m(t) = \frac{-k_1 t^{k_1-1}}{\sqrt{(1+t^{2k_1})(1+t^{2k_1}+t^{2k_1+2k_2})}},$$

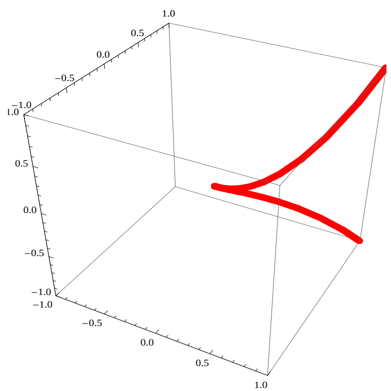
$$n(t) = \frac{-t^{k_1+k_2-1}(k_1+k_2+k_2 t^{2k_1})}{(1+t^{2k_1}+t^{2k_1+2k_2})\sqrt{1+t^{2k_1}}}, \quad \alpha(t) = t^{n_1-1}\sqrt{1+t^{2k_1}+t^{2k_1+2k_2}}.$$



$\gamma(t) = (t^2, t^3, t^4)$



$\gamma(t) = (t^2, t^3, t^5)$



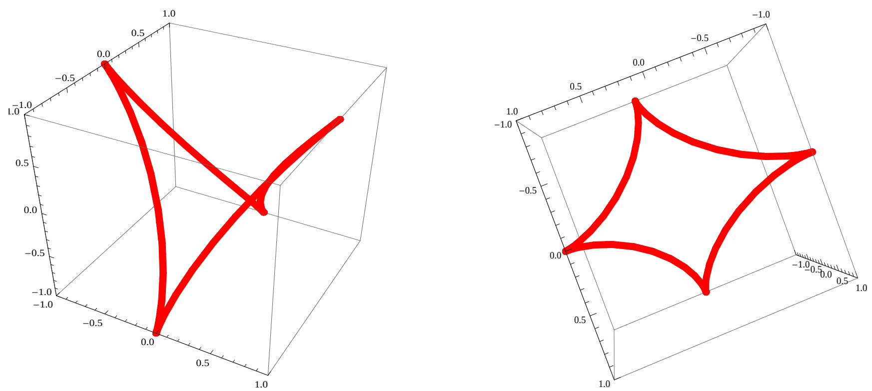
$\gamma(t) = (t^2, t^4, t^5)$

例（3次元アステロイド）: $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t), \nu_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),\ \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3).$$

$\Rightarrow$ (γ, ν_1, ν_2) : 枠付き曲線かつ $\mu(t) = \frac{1}{5}(-3\cos t, 3\sin t, -4)$.

枠付き曲線の曲率は $\ell(t) = \dfrac{4}{5},\ m(t) = \dfrac{3}{5},\ n(t) = 0,\ \alpha(t) = 5\cos t \sin t$.



定義　$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$: 枠付き曲線 $\iff$ $\dot\gamma(t) \cdot \nu_1(t) = 0,\ \dot\gamma(t) \cdot \nu_2(t) = 0,\ \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0$.

命題（1つの存在条件）

$\gamma : (I, t_0) \to \mathbb{R}^3$: 解析写像芽 $\Rightarrow$ γ: 枠付けられた曲線である。つまり、ν_1, ν_2 が存在して $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : (I, t_0) \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ は枠付き曲線と出来る。

$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$: 枠付き曲線、(ℓ, m, n, α) : 曲率

$\star$ $f(t) := m(t)\dot{n}(t) - \dot{m}(t)n(t) + (m^2(t) + n^2(t))\ell(t)$ とする。

命題（曲率の性質）

(1) 任意の $t \in I$ に対して $\alpha(t) = 0 \Rightarrow \gamma(t)$ は1点である。

(2) 任意の $t \in I$ に対して $m(t) = n(t) = 0 \Rightarrow \gamma(t)$ は直線の一部である。

(3) 任意の $t \in I$ に対して $f(t) = 0$ かつ $m^2(t) + n^2(t) \neq 0 \Rightarrow \gamma(t)$ は平面の一部である。

注意：もちろん、これらはパラメータ変換に依らない性質である。

定義　$(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 回転　$\iff$　$(\overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2) \in \boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{S}^2$ のことで、$\boldsymbol{C}^\infty$ 関数 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})$ に対して

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{\nu}}_1(\boldsymbol{t}) \\ \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) & -\sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) \\ \sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) & \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{\nu}_2(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $(\boldsymbol{\gamma}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^3 \times \boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{S}^2$: 枠付き曲線であり、
その曲率は $(\overline{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{t}), \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}), \overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}))$,

$$\overline{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t}) - \dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}),$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}) \\ \overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) & -\sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) \\ \sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) & \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$$

となる。特に、$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})$ を $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t})$ を満たす $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 回転とする。
$\Rightarrow$ $\overline{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ となる。$\{\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(\boldsymbol{t}), \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t})\}$ を適合枠という。

定義　$(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 反転 $\iff$ $(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2) \in S^2 \times S^2$ のことで

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \\ \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1(t) \\ \boldsymbol{\nu}_2(t) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $(\gamma, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$: 枠付き曲線であり、その曲率は $(-\ell(t), -m(t), n(t), -\alpha(t))$ となる。

定義　$(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 回転と $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 反転の合成を $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 変換という。

$\theta : I \to \mathbb{R}$ を $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$ とする。

定義 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して γ の平行曲線を $\gamma_{(a,b)} : I \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma_{(a,b)}(t) = \gamma(t) + (a\cos\theta(t) + b\sin\theta(t))\,\boldsymbol{\nu}_1(t) + (-a\sin\theta(t) + b\cos\theta(t))\,\boldsymbol{\nu}_2(t).$$

命題（平行曲線は枠付き曲線）

平行曲線 $\gamma_{(a,b)}$ は枠付けられた曲線である。正確には $(\gamma_{(a,b)}, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ は枠付き曲線で、その曲率は $(\ell(t), m(t), n(t), \alpha(t) + a(m(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t)) + b(m(t)\sin\theta(t) + n(t)\cos\theta(t)))$.

例（3次元アステロイド）: $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t), \nu_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),\ \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3).$$

$$\ell(t) = \frac{4}{5},\ m(t) = \frac{3}{5},\ n(t) = 0,\ \alpha(t) = 5\cos t \sin t.$$

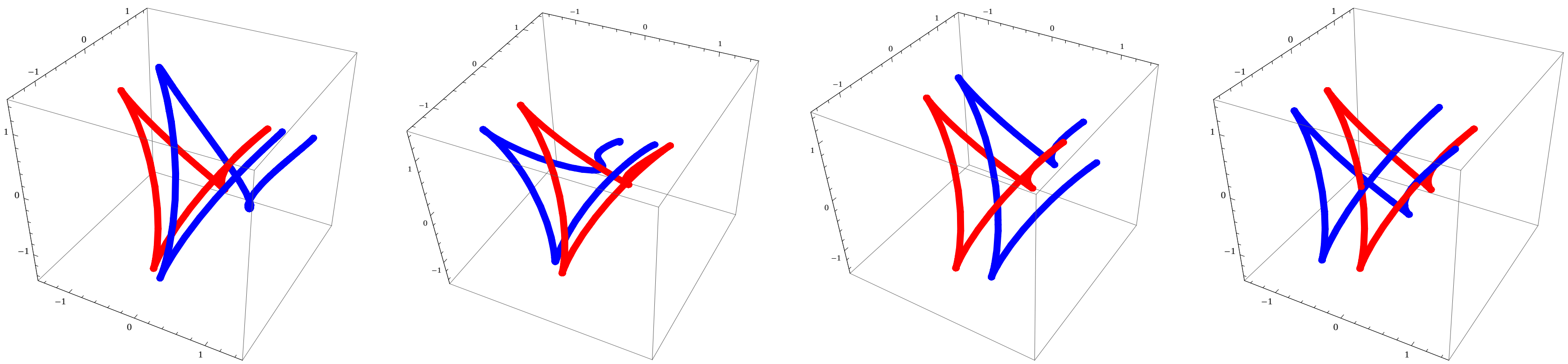
$\theta : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ を $\theta(t) = \frac{4}{5}t$ （$\dot{\theta}(t) = \frac{4}{5} = \ell(t)$）

$$\gamma_{(a,b)}(t)=\Bigg(\cos^3 t+a\left(-\sin t\cos\frac{4}{5}t+\frac{4}{5}\cos t\sin\frac{4}{5}t\right)+b\left(-\sin t\sin\frac{4}{5}t-\frac{4}{5}\cos t\cos\frac{4}{5}t\right),$$

$$\sin^3 t+a\left(-\cos t\cos\frac{4}{5}t-\frac{4}{5}\sin t\sin\frac{4}{5}t\right)+b\left(-\cos t\sin\frac{4}{5}t+\frac{4}{5}\sin t\cos\frac{4}{5}t\right),$$

$$\cos 2t-\frac{3}{5}a\sin\frac{4}{5}t+\frac{3}{5}b\cos\frac{4}{5}t\Bigg).$$

$$\ell_{(a,b)}(t)=\frac{4}{5},\ \ m_{(a,b)}(t)=\frac{3}{5},\ \ n_{(a,b)}(t)=0,\alpha_{(a,b)}(t)=5\cos t\sin t+\frac{3}{5}a\cos\frac{4}{5}t+\frac{3}{5}b\sin\frac{4}{5}t.$$



$a=0,b<0$ $\quad$ $a=0,b>0$ $\quad$ $a<0,b=0$ $\quad$ $a>0,b=0$

- 正則曲線$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$の縮閉線：

（D. Fuchs, Evolutes and Involutes of Spatial Curves, Amer. Math. Monthly. 120 (2013), 217-231.）

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$：独立条件を満たす正則曲線で曲率$\kappa(t) > 0$, $\tau(t) \neq 0$とする。

定義 γの縮閉線$E_v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$を

$$E_v(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}n(t) - \frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)|\dot{\gamma}(t)|}b(t).$$

注意：$E_v(\gamma)(t)$は接触球の中心である。

もし

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)|\dot{\gamma}(t)|}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\dot{E}_v(\gamma)(t) = 0$となるし、独立条件も満たすわけではない。

- 枠付き曲線の縮閉線：

$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$：枠付き曲線に対して (ℓ, m, n, α) を曲率とする。 以降、任意の $t \in I$ に対して

$$f(t) = m(t)\dot{n}(t) - \dot{m}(t)n(t) + (m^2(t) + n^2(t))\ell(t) \neq 0$$

とする。

定義 γ の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ を

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\nu_1(t) + \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\nu_2(t).$$

注意：$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$：独立条件を満たす正則曲線ならば (γ, n, b)：枠付き曲線で $E_v(\gamma)(t) = \mathcal{E}v(\gamma)(t)$ が成り立つ。

適合枠を取り$\boldsymbol{\ell(t) = 0}$とすれば、$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m(t) & n(t) \\ \dot{m}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix}} \nu_1(t) + \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m(t) & n(t) \\ \dot{m}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix}} \nu_2(t).$

命題（縮閉線の一致）

(1) $(\gamma, \nu_1, \nu_2)(t)$ と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu_1}, \widetilde{\nu_2})(u)$ がパラメータ変換で一致する。
$\Rightarrow \mathcal{E}v(\gamma)(t) = \mathcal{E}v(\widetilde{\gamma})(u).$

(2) (γ, ν_1, ν_2) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu_1}, \widetilde{\nu_2})$ が (ν_1, ν_2) 変換で一致する。
$\Rightarrow \mathcal{E}v(\gamma)(t) = \mathcal{E}v(\widetilde{\gamma})(t).$

(3) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{E}v(\gamma_{(a,b)})(t) = \mathcal{E}v(\gamma)(t).$

$$\gamma_{(a,b)}(t) = \gamma(t) + (a\cos\theta(t) + b\sin\theta(t))\,\nu_1(t) + (-a\sin\theta(t) + b\cos\theta(t))\,\nu_2(t),$$

$(\dot{\theta}(t) = \ell(t)).$

命題（縮閉線は枠付き曲線）

縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma)$ は枠付けられた曲線である。正確には $(\mathcal{E}v(\gamma), \nu_1^1, \nu_2^1) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ は枠付き曲線で、その曲率 $(\ell^1, m^1, n^1, \alpha^1)$ は

$$\nu_1^1(t) = \mu(t), \nu_2^1(t) = \frac{1}{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}}(m(t)\nu_1(t) + n(t)\nu_2(t)), \mu^1(t) = \nu_1^1(t) \times \nu_2^1(t),$$

$$\ell^1(t) = -\sqrt{m^2(t)+n^2(t)},\ m^1(t) = 0,\ n^1(t) = \frac{f(t)}{m^2(t)+n^2(t)},$$

$\alpha^1(t) =$

$$\frac{n(t)}{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\right) + \ell(t)\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\right)\right)$$

$$+ \frac{m(t)}{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\right) - \ell(t)\left(\frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\right)\right).$$

注意：$f(t) \neq 0 \Longrightarrow m^2(t) + n^2(t) \neq 0.$

命題（縮閉線の１つの意味）

(1) 任意の $t \in I$ に対して $(d/dt)\mathcal{E}v(\gamma)(t) = 0$、つまり $\mathcal{E}v(\gamma)$：定数

$\Rightarrow \gamma(t) \in S^2(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - a|^2 = r^2\}$.

(2) $\gamma(t) \in S^2(a, r)$ かつ $\gamma(t) - a \in \langle \nu_1(t), \nu_2(t) \rangle \Rightarrow \mathcal{E}v(\gamma)(t)$：定数

$$F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (t, v) \mapsto (\gamma(t) - v) \cdot \mu(t).$$

命題（関数族の特異点）

(1) $F(t, v) = 0 \iff v = \gamma(t) - a\nu_1(t) - b\nu_2(t)$.

(2) $F(t, v) = (\partial F/\partial t)(t, v) = 0$

$\iff v = \gamma(t) - a\nu_1(t) - b\nu_2(t)$ かつ $\alpha(t) - am(t) - bn(t) = 0$.

(3) $F(t, v) = (\partial F/\partial t)(t, v) = (\partial^2 F/\partial t^2)(t, v) = 0$

$\iff v = \mathcal{E}v(\gamma)(t)$.

定義 (2) の v を γ の焦面

$$\mathcal{FS}(\gamma) : I \times J \to \mathbb{R}^3, \mathcal{FS}(\gamma)(t,a,b) = \gamma(t) - a\nu_1(t) - b\nu_2(t)$$

という。ここで、$J = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \alpha(t) - am(t) - bn(t) = 0\}$.

命題（$\mathcal{E}v(\gamma)$ と $\mathcal{FS}(\gamma)$ の特異点）

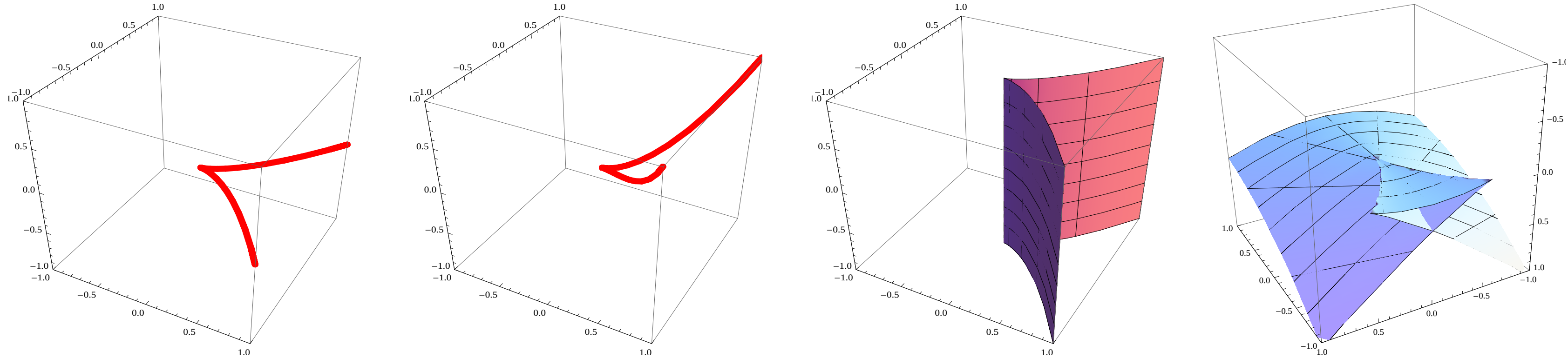
(1) $\mathcal{FS}(\gamma)$ の特異点の像は $\mathcal{E}v(\gamma)$ の像と一致する。

(2) $\mathcal{FS}(\gamma) : I \times J \to \mathbb{R}^3$ が (t_0, a, b)（$\mathcal{FS}(t_0,a,b) = \mathcal{E}v(\gamma)(t_0)$）でカスピダルエッジ（カスプ状曲面、$A_2$ 特異点）と微分同相である。

$\iff$ $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ が t_0 で正則点である。

(3) $\mathcal{FS}(\gamma) : I \times J \to \mathbb{R}^3$ が (t_0, a, b)（$\mathcal{FS}(t_0,a,b) = \mathcal{E}v(\gamma)(t_0)$）でスワローテイル（ツバメの尾、$A_3$ 特異点）と微分同相である。

$\iff$ $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ が t_0 で $(2,3)$ カスプ（A_2 特異点）と微分同相である。



★ $(2,3)$ カスプ：$t \mapsto (t^2, t^3, 0)$.
★ カスピダルエッジ：$(u,v) \mapsto (u^2, u^3, v)$.
★ スワローテイル：$(u,v) \mapsto (3u^4 + u^2 v, -4u^3 - 2uv, v)$.

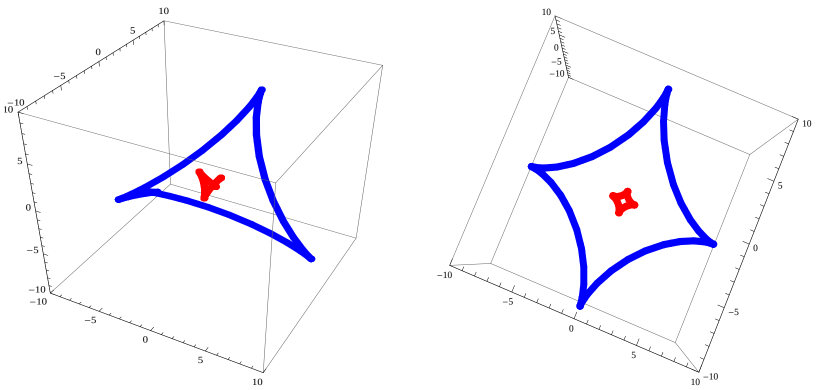
例（3 次元アステロイド）：$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t), \nu_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),\ \nu_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3).$$

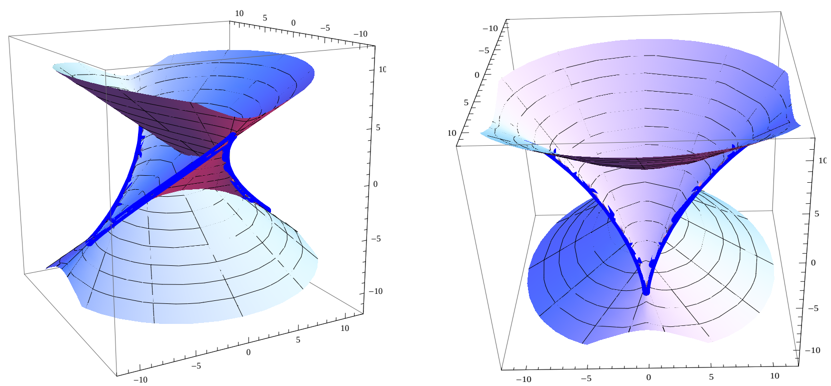
$$\ell(t) = \frac{4}{5},\ m(t) = \frac{3}{5},\ n(t) = 0,\ \alpha(t) = 5\cos t \sin t.$$

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = (\frac{28}{3}\cos^3 t, \frac{28}{3}\sin^3 t, -\frac{21}{4}\cos 2t).$$

$$\mathcal{FS}(\gamma)(t,b) = (\cos^3 t + (25/3)\cos t \sin^2 t + (5/4)b\cos t,$$
$$\sin^3 t + (25/3)\cos^2 t \sin t - (5/4)b \sin t, \cos 2t - (3/5)b).$$



$\gamma(t)$ と $\mathcal{E}v(\gamma)$



$\mathcal{FS}(\gamma)$ と $\mathcal{E}v(\gamma)$

$\boldsymbol{k}$ 回縮閉線を与える。$\mathcal{E}v^0(\gamma)(t)=\gamma(t), \mathcal{E}v^1(\gamma)(t)=\mathcal{E}v(\gamma)(t)$ とする。

帰納的に $\mathcal{E}v^k(\gamma)(t)=\mathcal{E}v(\mathcal{E}v^{k-1}(\gamma))(t)$,

$$\nu_1^k(t)=\begin{cases}\nu_1^1(t) & (k:\text{奇数})\\ \mu^1(t) & (k:\text{偶数})\end{cases},\quad \nu_2^k(t)=\begin{cases}\nu_2^1(t) & (k:\text{奇数})\\ -\nu_2^1(t) & (k:\text{偶数})\end{cases},$$

$$\ell^k(t)=\begin{cases}\ell^1(t) & (k:\text{奇数})\\ n^1(t) & (k:\text{偶数})\end{cases},\quad n^k(t)=\begin{cases}n^1(t) & (k:\text{奇数})\\ \ell^1(t) & (k:\text{偶数})\end{cases},$$

$$\alpha^k(t)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\begin{vmatrix}\alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t)\\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t)\end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2}\right)+\frac{\alpha^{k-1}(t)\ell^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)}\ (k\geq 2).$$

定理（$\boldsymbol{k}$ 回の縮閉線は枠付き曲線）

$(\mathcal{E}v^k(\gamma), \nu_1^k, \nu_2^k) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ は枠付き曲線で、その曲率は $(\ell^k, 0, n^k, \alpha^k)$ で与えられる。

$k = 1$:

$$\mathcal{E}v^1(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & n(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{n}(t) \end{vmatrix} + \alpha(t)\ell(t)m(t)}{f(t)}\nu_1(t) + \frac{\begin{vmatrix} \alpha(t) & m(t) \\ \dot{\alpha}(t) & \dot{m}(t) \end{vmatrix} - \alpha(t)\ell(t)n(t)}{f(t)}\nu_2(t).$$

$k \geq 2$:

$$\mathcal{E}v^k(\gamma)(t) = \mathcal{E}v^{k-1}(\gamma)(t) - \frac{\begin{vmatrix} \alpha^{k-1}(t) & n^{k-1}(t) \\ \dot{\alpha}^{k-1}(t) & \dot{n}^{k-1}(t) \end{vmatrix}}{\ell^{k-1}(t)(n^{k-1}(t))^2}\nu_1^{k-1}(t) - \frac{\alpha^{k-1}(t)}{n^{k-1}(t)}\nu_2^{k-1}(t).$$

まとめ

$\star$ 空間曲線に対して、独立条件を満たす正則曲線を含み、特異点を許容する曲線として、枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$ を導入し、曲率 (ℓ, m, n, α) により定式化しました。

$\star$ 枠付き曲線の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^3$ の定式化を行い、性質をいくつか紹介しました。

$\star$ 平面曲線とは異なり、特異点を持つ空間曲線の良い具体例が見当たりません。ご存知の方はご教授頂ければ幸いです。