Evolutes and involutes of frontals

フロンタルの縮閉線と伸開線について

第２１回　沼津研究集会

２０１４年３月６日（木）～３月８日（土）

高橋　雅朋（Masatomo Takahashi）

室蘭工業大学（Muroran Institute of Technology）

Evolutes and involutes of fronts

縮閉線と伸開線について

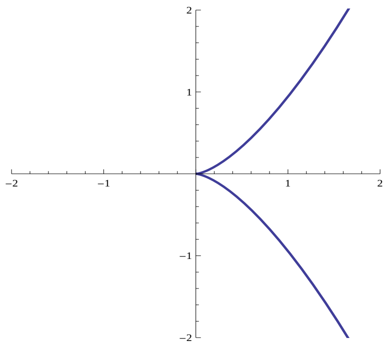
第２０回　沼津研究集会

２０１３年３月６日（水）～３月８日（金）

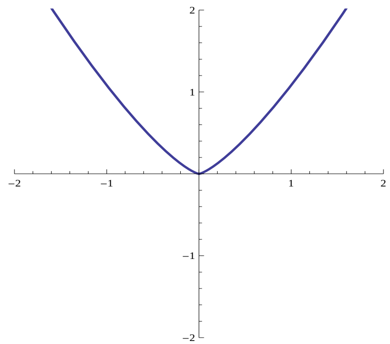
高橋　雅朋（Masatomo Takahashi）

室蘭工業大学（Muroran Institute of Technology）

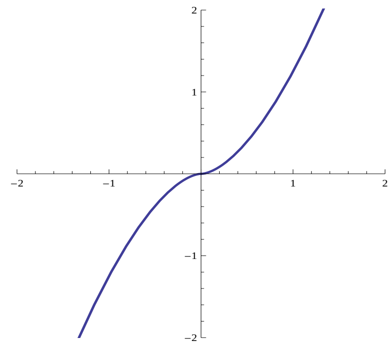
1．平面曲線とルジャンドル曲線について
2．フロントの縮閉線と伸開線について
3．フロンタルの縮閉線と伸開線について



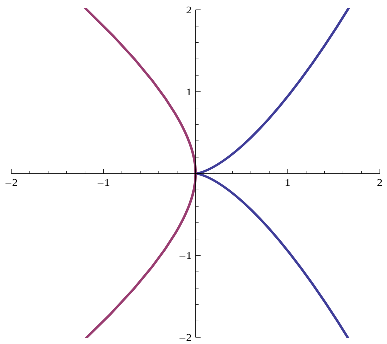
$\boldsymbol{t \mapsto (t^2, t^3)}$
$\mathbf{(2,3)}$ カスプ、フロント

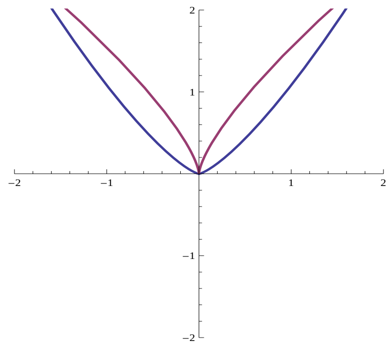


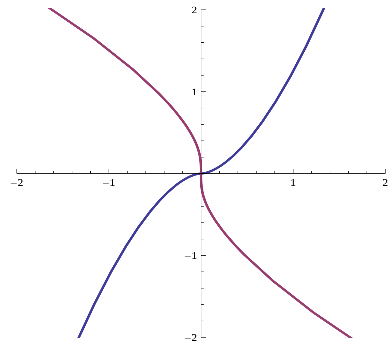
$\boldsymbol{t \mapsto (t^3, t^4)}$
$\mathbf{(3,4)}$ カスプ、フロント



$\boldsymbol{t \mapsto (t^3, t^5)}$
$\mathbf{(3,5)}$ カスプ、フロンタル



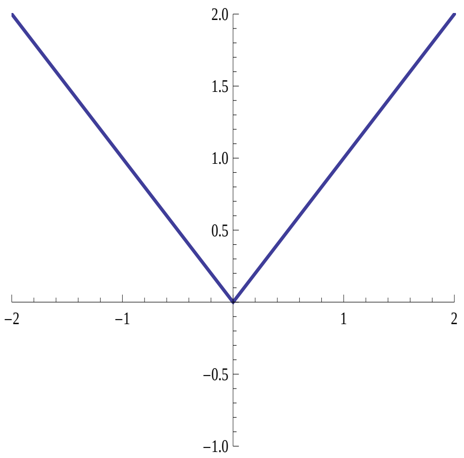


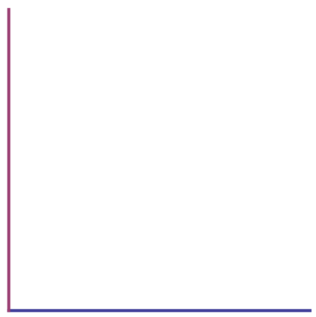


1．平面曲線とルジャンドル曲線について:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$：パラメータ表示された$C^\infty$曲線$\gamma(t) = (x(t), y(t))$を扱う。
- $\dot{\gamma}(t) = 0$となる点、特異点は許容する。

質問１：次の曲線は滑らかC^∞であるか？

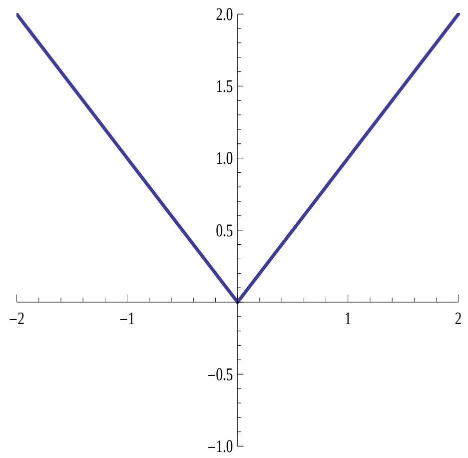


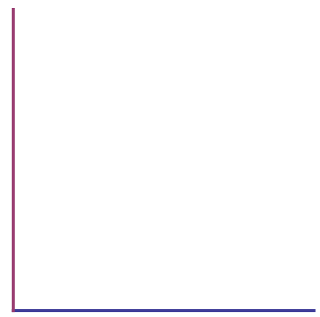


１．平面曲線とルジャンドル曲線について:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$：パラメータ表示された$C^\infty$曲線$\gamma(t) = (x(t), y(t))$を扱う。
- $\dot{\gamma}(t) = 0$となる点、特異点は許容する。

質問１：次の曲線は滑らかC^∞であるか？





解答：C^∞パラメータ表示がある。

定義：$(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線 $\iff (\gamma,\nu)^*\theta = 0 \iff \dot{\gamma}(t)\cdot\nu(t) = 0 \quad ({}^\forall t \in I)$. ここで θ は $T_1\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ 上の標準的な接触形式とする。さらに、(γ,ν) がはめ込みなら（$(\dot{\gamma}(t),\dot{\nu}(t)) \neq (0,0)$）、$(\gamma,\nu)$：ルジャンドルはめ込みという。

定義：$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ がフロンタル（または、フロント） $\iff \nu : I \to S^1 : C^\infty$ が存在して (γ,ν) がルジャンドル曲線（または、ルジャンドルはめ込み）となる。

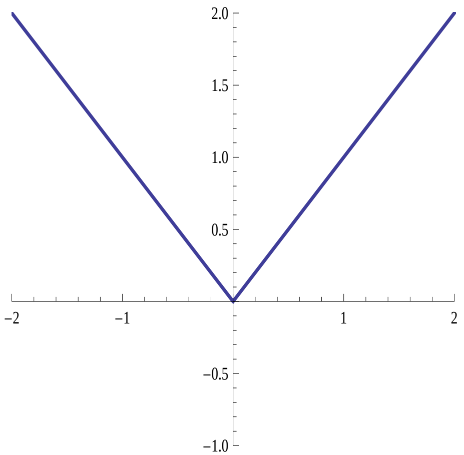
例１（正則曲線）：$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$：正則曲線に対して、$\nu : I \to S^1$ を $\nu(t) = n(t)$ とすれば、(γ,ν)：ルジャンドルはめ込みになる。よって、γ はフロントである。

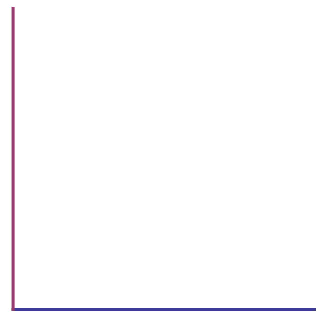
例２（(n,m) タイプ、$n < m = n+k$）：$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{n}t^n, \frac{1}{m}t^m\right)$$

とする。$\boldsymbol{\nu}: \mathbb{R} \to \boldsymbol{S}^1$ を $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{t}^{2\boldsymbol{k}}+1}}(-\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}, 1)$ とすれば $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ はルジャンドル曲線である。（$\boldsymbol{k} = 1$ であればルジャンドルはめ込みである。）

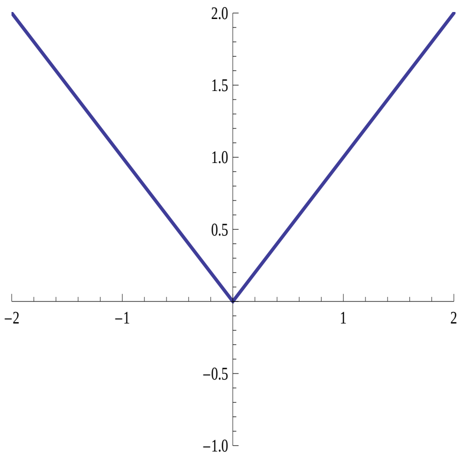
質問２：次の曲線はフロンタル（単位法線が定義できるか）であるか？

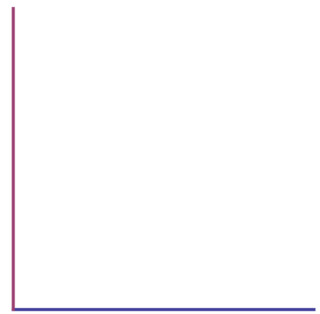




とする。$\boldsymbol{\nu} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{S^1}$ を $\boldsymbol{\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2k}+1}}(-t^k, 1)}$ とすれば $\boldsymbol{(\gamma, \nu)}$ はルジャンドル曲線である。（$\boldsymbol{k = 1}$ であればルジャンドルはめ込みである。）

質問２：次の曲線はフロンタル（単位法線が定義できるか）であるか？





解答：ルジャンドル曲線となる $\boldsymbol{C^\infty}$ パラメータ表示がある。

命題（ルジャンドル曲線）

$\widetilde{\gamma}:\widetilde{I}\to\mathbb{R}^2$: C^∞ 曲線、特異点の集合は孤立点または閉区間とする。このとき、ルジャンドル曲線 $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ が存在して、$\gamma(I)=\widetilde{\gamma}(\widetilde{I})$ となる。

予想（ルジャンドル曲線）

任意の $\widetilde{\gamma}:\widetilde{I}\to\mathbb{R}^2$: C^∞ 曲線に対して、ルジャンドル曲線 $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ が存在して、$\gamma(I)=\widetilde{\gamma}(\widetilde{I})$ となる。

ルジャンドル曲線 $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ に対して、$\mu(t):=J(\nu(t))$ とする。このとき $\{\nu(t),\mu(t)\}$ をフロンタル $\gamma(t)$ の動標構と呼ぶ。

- フロンタルのフルネ型の公式：

$$\begin{pmatrix}\dot{\nu}(t)\\ \dot{\mu}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \ell(t)\\ -\ell(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu(t)\\ \mu(t)\end{pmatrix},$$

ここで、$\boldsymbol{\ell(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)}$ である。

● $\boldsymbol{\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0}$ なので $\boldsymbol{\beta : I \to \mathbb{R}}$ が存在して $\boldsymbol{\dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)}$ となる。

定義：$\boldsymbol{(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\ell(t), \beta(t))}$ を（パラメータ $\boldsymbol{t}$ における）ルジャンドル曲率と呼ぶ。

命題（曲率の関係）

$\boldsymbol{\gamma}$ を曲率 $\boldsymbol{\kappa(t)}$ の正則曲線とする。$\boldsymbol{(\gamma, n)}$: ルジャンドル曲線に対して、ルジャンドル曲率を $\boldsymbol{(\ell(t), \beta(t))}$ とする。このとき $\boldsymbol{\ell(t) = |\beta(t)|\kappa(t)}$ が成り立つ。

注意：弧長パラメータを取ると、$\boldsymbol{|\beta(t)| = 1}$ なので $\boldsymbol{\ell(t) = \kappa(t)}$ である。

注意：$\boldsymbol{t_0}$ がフロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の特異点 $\iff$ $\boldsymbol{\beta(t_0) = 0}$ である。

定義：t_0 がフロンタル γ の変曲点（または、ルジャンドル曲線 (γ, ν) の変曲点）
$\Longleftrightarrow$ $\ell(t_0) = 0$ とする。（この定義は正則曲線のときの拡張になっている。）

- ルジャンドルはめ込みであれば、$(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$ となる。

$(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線とする。

定義：(γ, ν) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ がルジャンドル曲線として合同
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ の回転行列 A と平行移動 b が存在して、

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + b, \quad \widetilde{\nu}(t) = A(\nu(t)) \quad ({}^\forall t \in I).$$

定理（存在性）

写像 $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2$ に対して、$(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\beta})$ を曲率とするようなルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ が存在する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t}) &= \left(-\int \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t}) \sin\left(\int \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{dt}\right) \boldsymbol{dt},\ \int \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t}) \cos\left(\int \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{dt}\right) \boldsymbol{dt}\right), \\
\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}) &= \left(\cos\left(\int \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{dt}\right),\ \sin\left(\int \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{dt}\right)\right).
\end{aligned}
$$

定理（一意性）

ルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}), (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ に対して、曲率 $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\beta})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ が一致しているとする。このとき、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ はルジャンドル曲線として合同である。

● $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線に対して、$(\ell, \beta)$ をルジャンドル曲率とする。$f : \widetilde{I} \to I$ を任意の関数 $\Rightarrow$

$$(\gamma \circ f, \boldsymbol{\nu} \circ f) : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2 \times S^1$$

もルジャンドル曲線であり、ルジャンドル曲率は $((\ell \circ f)f', (\beta \circ f)f')$ となる。

２．フロントの縮閉線と伸開線について：

定義（再掲）：$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$: フロント $\iff$ $\boldsymbol{\nu} : I \to S^1$ が存在して、$(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドルはめ込み、つまり $\dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) = 0$ かつ $(\dot{\gamma}(t), \dot{\boldsymbol{\nu}}(t)) \neq (0,0)$（${}^\forall t \in I$）.

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \beta(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

$\Rightarrow$ $(\ell(t), \beta(t)) \neq (0,0)$.

● 変曲点を持たない$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドルはめ込みに対して
（つまり$\underline{\ell(t) \neq 0}$に対して）、

定義 : γの縮閉線 $\iff$ $\mathcal{E}v(\gamma)(t) := \gamma(t) - \dfrac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t).$

定義 : γの伸開線 $\iff$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t) := \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^{t} \beta(t)\ dt\right)\mu(t).$

（これらの定義は正則曲線の定義の拡張になっている。）

正則曲線γの縮閉線 $\iff$ $Ev(\gamma)(t) = \gamma(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)}n(t)$

正則曲線γの伸開線 $\iff$ $Inv(\gamma, t_0)(t) = \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(t)|dt\right)t(t)$

命題（フロントの縮閉線と伸開線はフロント）

変曲点を持たない $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドルはめ込みに対して、(ℓ, β) をルジャンドル曲率とする。

(1) $(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みになる。よって $\mathcal{E}v(\gamma)$ はフロントである。ルジャンドル曲率は $(\ell, (d/dt)(\beta/\ell))$.

(2) $(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0), J^{-1}(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みなる。よって $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ はフロントである。ルジャンドル曲率は $(\ell, (\int_{t_0}^t \beta(u)du)\ell)$.

命題（縮閉線と伸開線の関係）

(1) $\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0))(t) = \gamma(t)$.

(2) $\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t) - \dfrac{\beta(t_0)}{\ell(t_0)}\nu(t)$.

命題（縮閉線と伸開線の特異点の関係）

(I) t_0 を γ の特異点とする。

(1) t_0 が $\mathcal{E}v(\gamma)$ の正則点 $\iff$ γ は $3/2$ カスプと t_0 において微分同相である。

(2) $\mathcal{E}v(\gamma)$ が $3/2$ カスプと t_0 において微分同相 $\iff$ γ は $4/3$ カスプと t_0 において微分同相である。

(II) (1) t_0 が γ の正則点 $\iff$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は $3/2$ カスプと t_0 において微分同相である。

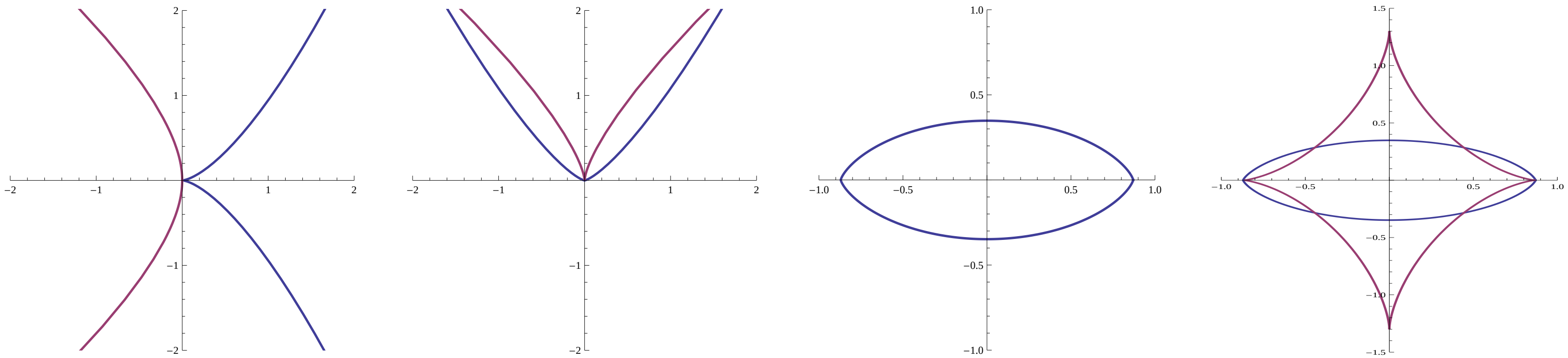
(2) γ が $3/2$ カスプに t_0 において微分同相 $\iff$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は $4/3$ カスプと t_0 において微分同相である。

- γ が t_0 において $3/2$ カスプと微分同相

$$\iff \dot{\gamma}(t_0) = 0,\ \det\left(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)\right) \neq 0.$$

- γ が t_0 において $4/3$ カスプと微分同相

$$\iff \dot{\gamma}(t_0) = \ddot{\gamma}(t_0) = 0,\ \det\left(\gamma^{(3)}(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)\right) \neq 0.$$



- $\mathcal{E}v(\gamma)$ や $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は変曲点を持たないフロントであるので、その繰り返しを考えることができる。
- $\mathcal{E}v^0(\gamma) := \gamma$, $\mathcal{E}v^1(\gamma) := \mathcal{E}v(\gamma)$, $\mathcal{E}v^n(\gamma) := \mathcal{E}v(\mathcal{E}v^{n-1}(\gamma))$
- $\mathcal{I}nv^0(\gamma, t_0) := \gamma$, $\mathcal{I}nv^1(\gamma, t_0) := \mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$,
  $\mathcal{I}nv^n(\gamma, t_0) := \mathcal{I}nv(\mathcal{I}nv^{n-1}(\gamma, t_0), t_0)$
- $\beta_0(t) := \beta(t)$, $\beta_n(t) := \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)}\right)$, $\beta_{-n}(t) := \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \beta_{-n+1}(t)dt\right)\ell(t)$

定理 (n 回の縮閉線と伸開線)

(1) $(\mathcal{E}v^n(\gamma)(t), J^n(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みで、ルジャンドル曲率は (ℓ, β_n) である。ここで、

$$\mathcal{E}v^n(\gamma)(t) = \mathcal{E}v^{n-1}(\gamma)(t) - \frac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)} J^{n-1}(\nu(t)).$$

(2) $(\mathcal{I}nv^n(\gamma, t_0), J^{-n}(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みで、ルジャンドル曲率は (ℓ, β_{-n}) である。ここで、

$$\mathcal{I}nv^n(\gamma, t_0)(t) = \mathcal{I}nv^{n-1}(\gamma, t_0) + \frac{\beta_{-n}(t)}{\ell(t)} J^{-n}(\nu(t)).$$

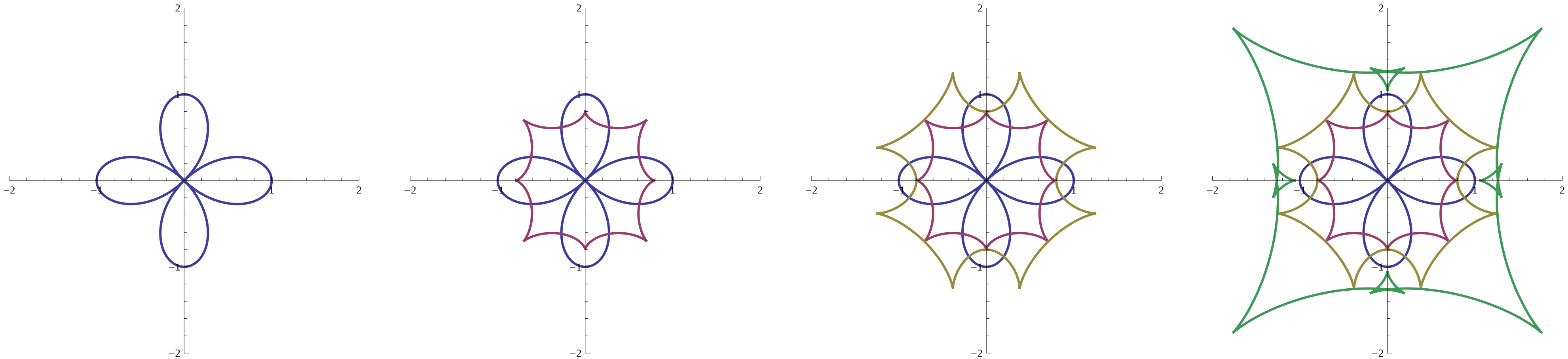
ここで J^n は J の n 回作用を表す。J は反時計回りに $\pi/2$ 回転する行列とする。

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\mathcal{I}nv^2, -\nu) & \overset{invo}{\longleftarrow} & (\mathcal{I}nv, -\mu) & \overset{invo}{\longleftarrow} & (\gamma, \nu) & \overset{evo}{\longrightarrow} & (\mathcal{E}v, \mu) & \overset{evo}{\longrightarrow} & (\mathcal{E}v^2, -\nu) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
(\ell, \beta_{-2}) & \longleftarrow & (\ell, \beta_{-1}) & \longleftarrow & (\ell, \beta) & \longrightarrow & (\ell, \beta_1) & \longrightarrow & (\ell, \beta_2)
\end{array}$$

- $\nu : I \to S^1$ に対して $\ell(t) \neq 0$ のとき $\ell(t) = 1$ となるパラメータをパラメータ変換により取ることができる。($\beta(t) \neq 0$ のときは弧長パラメータを取ることができた。)

このパラメータを使えば、縮閉線と伸開線のルジャンドル曲率の関係はまさに微分積分に対応する：

$$\cdots \leftarrow \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \beta(t) dt \right) dt \leftarrow \int_{t_0}^{t} \beta(t) dt \leftarrow \beta(t) \to \beta'(t) \to \beta''(t) \to \cdots$$



ローズ曲線 $\gamma(t) = (\cos 2t \sin t, \cos 2t \cos t)$

結論

変曲点を持たないフロントに対して、縮閉線と伸開線は再びフロントになり、縮閉線はルジャンドルはめ込みの曲率の微分に対応し、伸開線はルジャンドルはめ込みの曲率の積分に対応する。

- それでは変曲点がある場合はどうなるのだろうか？

$\Longrightarrow$ 正則曲線やルジャンドルはめ込みの枠組みでは、縮閉線の定義はできません。しかし、「あるクラス」に対して、縮閉線が定義できます（伸開線はいつでも定義できます）。その場合は、フロントではなくフロンタル（つまりルジャンドル曲線）となることが分かりますが、まだ、性質などあまり調べられていません。

３．フロンタルの縮閉線と伸開線について：

• $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線で、ルジャンドル曲率を (ℓ, β) とする。変曲点を持っていても良いとする。つまり $\ell(t) = 0$ となる点が存在する。

定義：γ の伸開線 $\iff$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t) := \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^{t} \beta(t)\ dt\right) \mu(t).$

定義：γ の縮閉線 $\iff$ $\mathcal{E}v(\gamma)(t) := \gamma(t) - \alpha(t)\nu(t).$

ここで、C^∞ 関数 $\alpha : I \to \mathbb{R}$ が一意的に存在して $\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ が成り立つ。

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}v(\gamma)$ が存在するという。

注意：縮閉線はもちろんいつでも存在するわけではない。

命題（縮閉線の一意性）

連続関数 $\alpha : I \to \mathbb{R}$ が存在して、$L = \{t \in I | \ell(t) \neq 0\}$ 上 $\alpha(t) = \beta(t)/\ell(t)$ とする。α が一意的である $\iff$ L が稠密であることである。つまり、$\overline{L} = I$ が成り立つ。

以下、$L = \{t \in I | \ell(t) \neq 0\}$ が稠密であると仮定する。

命題（フロンタルの縮閉線と伸開線はフロンタル）

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線に対して、

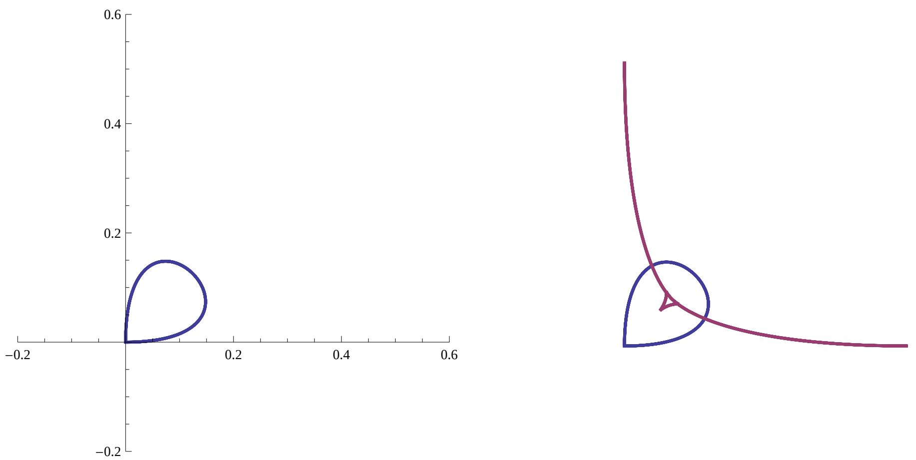
(1) $\mathcal{E}v(\gamma)$ が存在するときに、$(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線である。よって $\mathcal{E}v(\gamma)$ はフロンタルである。ルジャンドル曲率は $(\ell, \dot{\alpha})$.

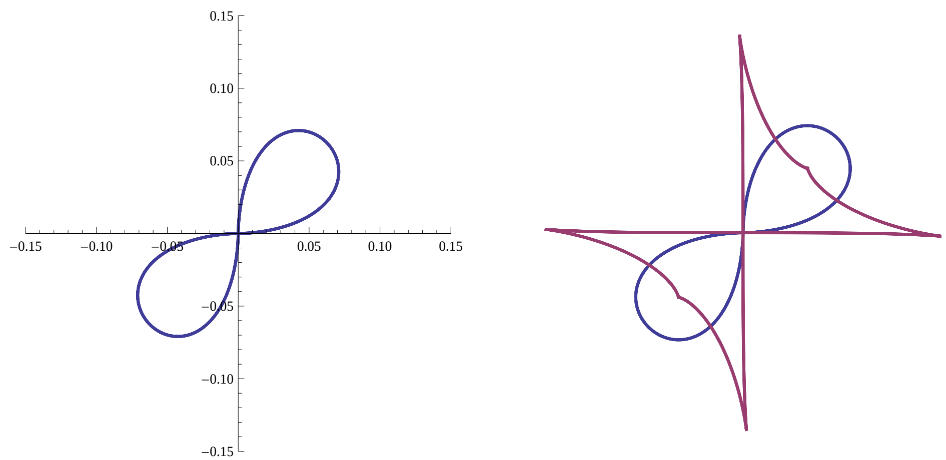
(2) $(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0), J^{-1}(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線である。よって $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ はフロンタルである。ルジャンドル曲率は $(\ell, (\int_{t_0}^{t} \beta(u) du)\ell)$.

命題（フロンタルの縮閉線と伸開線の関係）

(1) フロンタルの伸開線の縮閉線は常に存在し、$\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0))(t) = \gamma(t)$.

(2) もし$\mathcal{E}v(\gamma)$が存在するのなら、$\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t) - \alpha(t_0)\nu(t)$.





$\gamma(t) = (\sin^2 t \cos^4 t, \cos^2 t \sin^4 t)$, $\quad \gamma(t) = (\sin^3 t \cos^5 t, \cos^3 t, \sin^5 t)$

命題（縮閉線と伸開線の特異点の関係）

(1) γ が $5/3$ カスプと t_0 において微分同相 $\iff$ t_0 の回りで $\mathcal{E}v(\gamma)$ が存在して、$\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ は $\alpha(t_0) = 0$ を満たし、t_0 は $\mathcal{E}v(\gamma)$ の通常変曲点である。

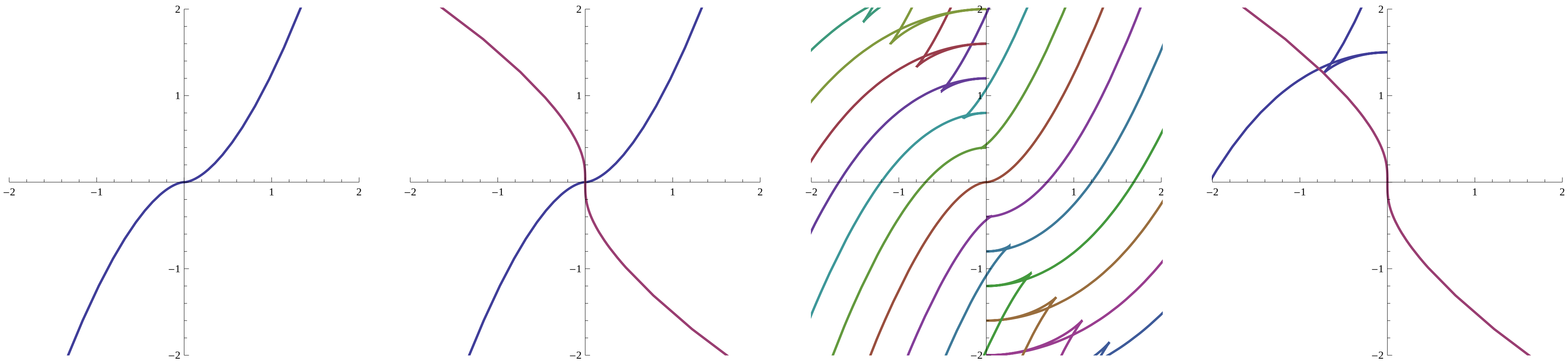
(2) $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は $5/3$ カスプと t_0 において微分同相 $\iff$ t_0 は γ の通常変曲点である。

- γ が t_0 において通常変曲点

$$\iff \det(\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) = 0, \ \det(\dot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0.$$

- γ が t_0 において $5/3$ カスプと微分同相 $\iff$ $\dot{\gamma}(t_0) = \ddot{\gamma}(t_0) = 0,$

$$\det\left(\gamma^{(3)}(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)\right) = 0, \ \det\left(\gamma^{(3)}(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)\right) \neq 0.$$



$$\gamma(t) = (t^3, t^5)$$

- $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} \times \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{1}}$: ルジャンドル曲線と$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$に対して平行曲線$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$を$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t})$とする。

命題（平行曲線の性質）

(1) $(\gamma_\lambda, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線である。よって γ_λ はフロンタルである。ルジャンドル曲率は $(\ell, \beta + \lambda\ell)$ である。

(2) もし $\mathcal{E}v(\gamma)$ が存在するならば、$\mathcal{E}v(\gamma_\lambda)$ も存在して一致する。

命題（伸開線と平行曲線）

任意の点 $t_0, t_1 \in I$ に対して、$\mathcal{I}nv(\gamma, t_1)$ は $(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0), J^{-1}(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ の平行曲線である。

- 伸開線の平行曲線全体：

$$\mathcal{PI}(\gamma, \nu) = \{(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0) + \lambda J^{-1}(\nu), J^{-1}(\nu)) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

これは t_0 には依存しない。帰納的に $\mathcal{PI}^n(\gamma, \nu) := \mathcal{PI}(\mathcal{PI}^{n-1}(\gamma, \nu))$ とする。また、縮閉線が存在するときには $\mathcal{E}v^n(\gamma) := \mathcal{E}v(\mathcal{E}v^{n-1}(\gamma))$ とする。

定理（$\boldsymbol{n}$ 回の縮閉線）

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線とする。次は同値である：

(1) $\boldsymbol{n}$ 回の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma)$ が存在して $(\mathcal{E}v^n(\gamma), J^n(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：ルジャンドル曲線である。

(2) あるルジャンドル曲線 $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が存在して、

$(\gamma, \nu) \in \mathcal{PI}^n(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ である。

結論

変曲点をもつ場合は、縮閉線はいつでも定義できるわけではない。正則曲線やフロントに対して変曲点がある場合は、縮閉線は定義されない。

仮定のもとで定義できる場合は、フロンタルに対して、縮閉線と伸開線は再びフロンタルになる。