Evolutes and involutes of fronts

縮閉線と伸開線について

第２０回　沼津研究集会

２０１３年３月６日（水）～３月８日（金）

高橋　雅朋（**Masatomo Takahashi**）

室蘭工業大学（**Muroran Institute of Technology**）

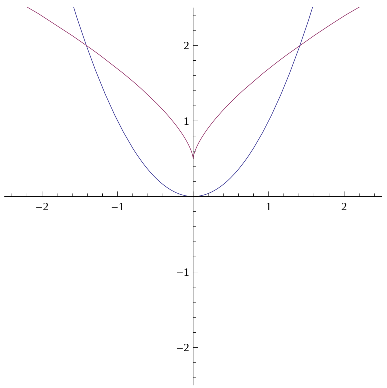
● 縮閉線と伸開線の歴史：

縮閉線（evolute）の認識は、アポロニウスの円錐曲線論（紀元前２００年ごろ）みたいですが、縮閉線というより、放物線の焦点についての記述なのでしょう。（確認していませんので、たぶんですが･･･）

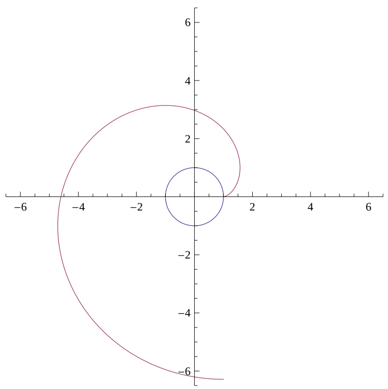
それから時は経ち、実際に考察・研究したのはホイヘンス（１６００年代）です。ホイヘンスは縮閉線を用いてホイヘンスの原理（波の生成）、光の波動性や振り子時計に対して、時計の等時性などを縮閉線・伸開線（involute，evolvent＊）を用いて研究しました。さらに、伸開線の研究は、変曲点における伸開線の図を書いていたそうです。その後、数世紀は研究がされていたみたいで、昔は教科書にも書いてあったようです。

＊英名involuteの語感は、曲線に真っ直ぐに張った糸を付けて曲線に沿って巻きつけていく操作を表している。ラテン語：involvo は「包む」という意味の動詞

で内へ向かうイメージのある言葉であるから、よくなされるように「閉線を巻き解く操作」として説明するとそのイメージはむしろ反対であり、伸開線、**evolvent** は語感に合う（ラテン語：**evolvo** は「追い出す、紐解く」という意味の動詞で、開いていくイメージのある言葉である）。（ウィキペデア抜粋）



放物線と縮閉線



円と伸開線

現在では、縮閉線は、フロントやコースティックとして捉えられ、ルジャンドル・ラグランジュ特異点論における曲線の場合の良い例となっています。一方、伸開線は、全く日の目を見ないわけですが、シェルバック（１９８３）により正２０面体の対

称群であるH_3の判別式と（変曲点での伸開線が）関係あるみたいですし、応用では歯車などで円の伸開線が使われているようです。

出典：
アーノルド『数理解析のパイオニアたち』（１９９９年）
フックス、タバチニコフ『メビウスの作った曲面』（２０１２年）

しかし、いずれにしろ、正則曲線に対して縮閉線や伸開線を考えるということで、対象には特異点が現れるにもかかわらず、特異点付きの曲線で研究をしていないのが現状であり、今回のお話は、曲線論を再構築し再定式化することです。

１．正則曲線について
２．ルジャンドル曲線について
３．フロントの縮閉線と伸開線

１．正則曲線について（$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$：正則、$C^\infty$）：

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0, \;\; \boldsymbol{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \;\; \boldsymbol{n}(t) := J(\boldsymbol{t}(t)) = \frac{J(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|},$$

ただし J は反時計回りに $\pi/2$ 回転する行列とする。$\{\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t)\}$ は $\gamma(t)$ の動標構。

- フレネの公式：$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{t}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) \\ -|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{n}(t) \end{pmatrix},$

ここで、曲率は $\kappa(t) = \dfrac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}(t) \cdot \boldsymbol{n}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ で与えられる。

注意：曲率 $\kappa(t)$ は向きを保つパラメータ変換で不変である。

- $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ となるパラメータを弧長パラメータという。
- 正則曲線であれば弧長パラメータをいつでも取れる。

$\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$: 正則曲線とする。

定義 : γ と $\widetilde{\gamma}$ が合同 $\iff$ $\mathbb{R}^2$ の回転行列 A とベクトル b が存在して、

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + b \quad ({}^{\forall} t \in I).$$

定理（存在性）

関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して、κ を曲率とするような正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が存在する。

$$\gamma(t) = \left(\int \cos\left(\int \kappa(t)\ dt \right) dt,\ \int \sin\left(\int \kappa(t)\ dt \right) dt \right).$$

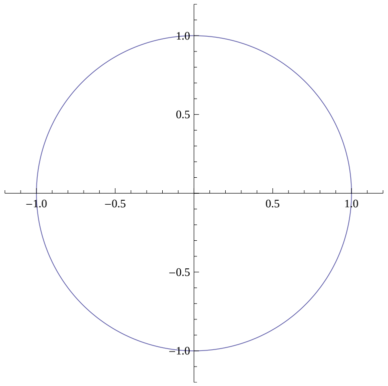
定理（一意性）

正則曲線$\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$に対して、速さ$s = |\dot{\gamma}(t)|$と$\widetilde{s} = |\dot{\widetilde{\gamma}}(t)|$、曲率$\kappa$と$\widetilde{\kappa}$が一致しているとする。このとき、$\gamma$と$\widetilde{\gamma}$は合同である。

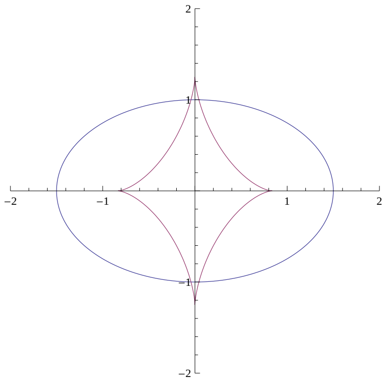
- 正則曲線$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$の縮閉線と伸開線を与える：

定義：γの縮閉線 $\iff$ $Ev(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)} n(t)$,
ただし、$\kappa(t) \neq 0$（つまり、変曲点を持たない）とする。

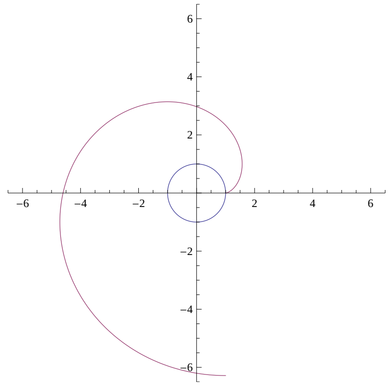
定義：$t_0 \in I$を1つ固定する。
γの伸開線 $\iff$ $Inv(\gamma, t_0) : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) - \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(t)| dt \right) t(t).$



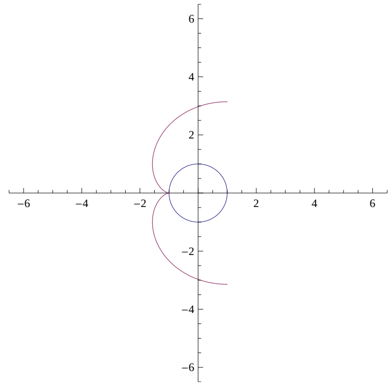
円の縮閉線



楕円の縮閉線



$t_0 = 0$のおける円の伸開線



$t_0 = \pi$

命題

(1) $Ev(Inv(\gamma, t_0))(t) = \gamma(t)$.

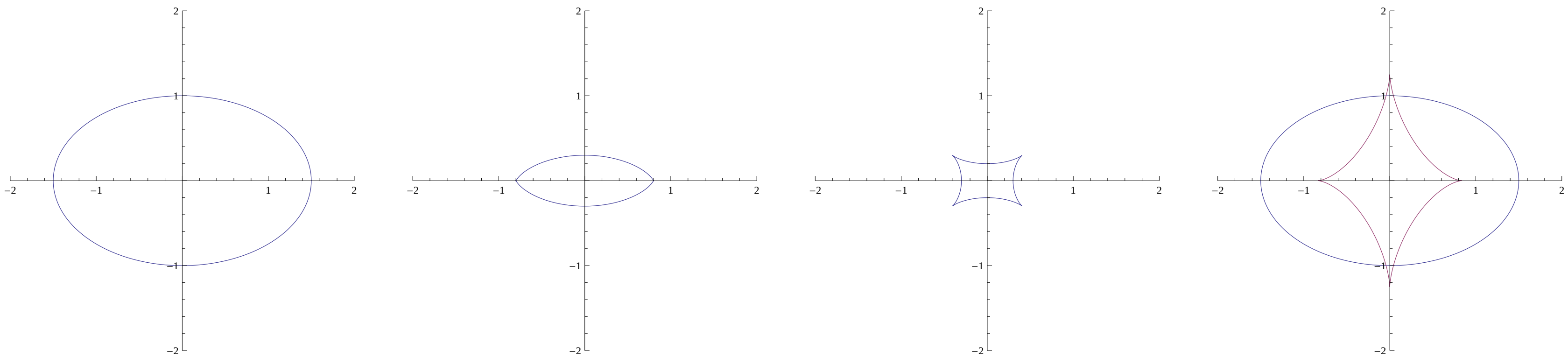
(2) $Inv(Ev(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t) + \dfrac{1}{\kappa(t_0)} n(t)$.

- この命題は特異点を除いて成立すると思っています。
- 正則曲線に対して、Ev は微分、Inv は積分みたいに見える。

定義：γ の平行曲線 $\iff$ $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}},\ \boldsymbol{t} \mapsto \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\lambda n}(\boldsymbol{t}) \quad (\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$

命題

正則曲線 γ に対して、$\boldsymbol{\lambda} \neq 1/\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{t})$ とすると、平行曲線 $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}}$ は正則曲線で $\boldsymbol{Ev}(\gamma_{\boldsymbol{\lambda}})(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Ev}(\gamma)(\boldsymbol{t})$ が成り立つ。



２．ルジャンドル曲線（$(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$）:

定義：$(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$：ルジャンドル曲線 $\iff$ $(\gamma,\nu)^*\theta=0$ $\iff$ $\dot\gamma(t)\cdot\nu(t)=0$ $({}^\forall t\in I)$. ここで θ は $T_1\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2\times S^1$ 上の標準的な接触形式とする。
さらに、(γ,ν) がはめ込みなら（$(\dot\gamma(t),\dot\nu(t))\neq(0,0)$）、
(γ,ν)：ルジャンドルはめ込みという。

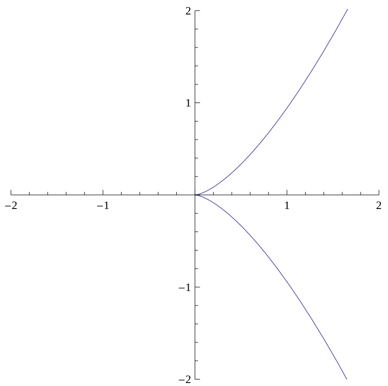
定義：$\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ がフロンタル（または、フロント） $\iff$ $\nu:I\to S^1:C^\infty$ が存在して (γ,ν) がルジャンドル曲線（または、ルジャンドルはめ込み）となる。

例１（正則曲線）: $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$: 正則曲線に対して、$\nu:I\to S^1$ を $\nu(t)=n(t)$ とすれば、(γ,ν)：ルジャンドルはめ込みになる。よって、γ はフロントである。

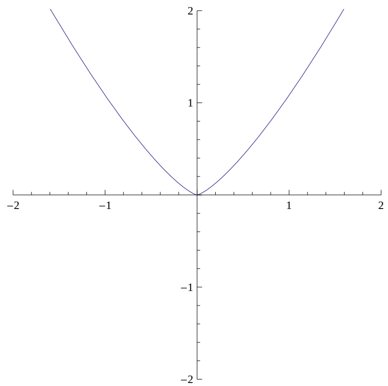
例２（(n, m) タイプ、$n < m = n + k$）：　$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{n}t^n, \frac{1}{m}t^m\right)$$

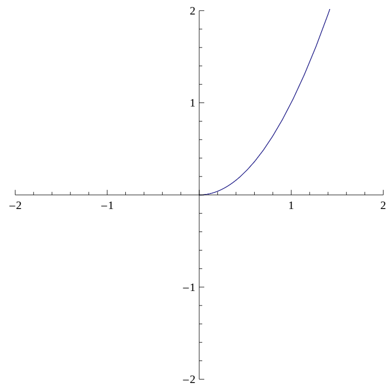
とする。$\nu : \mathbb{R} \to S^1$ を $\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2k}+1}}(-t^k, 1)$ とすれば (γ, ν) はルジャンドル曲線である。（$k = 1$ であればルジャンドルはめ込みである。）



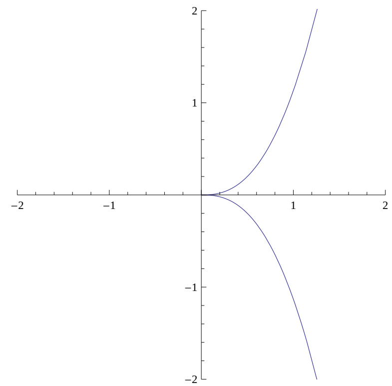
$(2, 3)$
$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$



$(3, 4)$
$\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{4}t^4\right)$



$(2, 4)$
$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{4}t^4\right)$



$(2, 5)$
$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{5}t^5\right)$

ルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ に対して、$\mu(t) := J(\nu(t))$ とする。このとき $\{\nu(t), \mu(t)\}$ をフロンタル $\gamma(t)$ の動標構と呼ぶ。

- フロンタルのフルネ型の公式：

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix},$$

ここで、$\ell(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)$ である。

- $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$ なので $\beta : I \to \mathbb{R}$ が存在して $\dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)$ となる。

定義：$(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\ell(t), \beta(t))$ をルジャンドル曲線の（パラメータ t における）曲率と呼ぶ。

命題（曲率の関係）

γを曲率$\kappa(t)$の正則曲線とする。(γ, n) : ルジャンドル曲線に対して、ルジャンドル曲線の曲率を$(\ell(t), \beta(t))$とする。このとき$\ell(t) = |\beta(t)|\kappa(t)$が成り立つ。

注意 : 弧長パラメータを取ると、$|\beta(t)| = 1$なので$\ell(t) = \kappa(t)$である。

注意 : t_0がフロンタルγの特異点 $\iff$ $\beta(t_0) = 0$である。

定義 : t_0がフロンタルγの変曲点（または、ルジャンドル曲線(γ, ν)の変曲点）$\iff$ $\ell(t_0) = 0$とする。（この定義は正則曲線のときの拡張になっている。）

- ルジャンドルはめ込みであれば、$(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$となる。

$(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドル曲線とする。

定義：(γ,ν) と $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})$ がルジャンドル曲線として合同
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ の回転行列 A と平行移動 b が存在して、

$$\widetilde{\gamma}(t)=A(\gamma(t))+b,\qquad \widetilde{\nu}(t)=A(\nu(t))\qquad ({}^\forall t\in I).$$

定理（存在性）

写像 $(\ell,\beta):I\to\mathbb{R}^2$ に対して、(ℓ,β) を曲率とするようなルジャンドル曲線 $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ が存在する。

$$\gamma(t)=\left(-\int\beta(t)\sin\left(\int\ell(t)\ dt\right)dt,\ \int\beta(t)\cos\left(\int\ell(t)\ dt\right)dt\right),$$
$$\nu(t)=\left(\cos\left(\int\ell(t)\ dt\right),\ \sin\left(\int\ell(t)\ dt\right)\right).$$

定理（一意性）

ルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}), (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ に対して、曲率 $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\beta})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ が一致しているとする。このとき、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ はルジャンドル曲線として合同である。

3．フロントの縮閉線と伸開線：

定義（再掲）：$\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2$: フロント $\iff$ $\boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{S}^1$ が存在して、$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{S}^1$: ルジャンドルはめ込み、つまり $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ かつ $(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{t})) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$（${}^{\forall}\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$）.

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{t}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t}) \\ -\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t}) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t})$$

$\Rightarrow (\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t})) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}).$

● 変曲点を持たない $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$: ルジャンドルはめ込みに対して（つまり $\ell(t) \neq 0$ に対して）、

定義 : γ の縮閉線 $\iff$ $\mathcal{E}v(\gamma)(t) := \gamma(t) - \dfrac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t).$

定義 : γ の伸開線 $\iff$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t) := \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^{t} \beta(t)\ dt\right)\mu(t).$

（これらの定義は正則曲線の定義の拡張になっている。）

命題（フロント）

(1) $\mathcal{E}v(\gamma)(t)$ はフロントである。 $\nu_{\mathcal{E}v(\gamma)}(t) := J(\nu(t)) = \mu(t)$ である。

(2) $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t)$ はフロントである。$\nu_{\mathcal{I}nv(\gamma,t_0)}(t) := J^{-1}(\nu(t)) = -\mu(t)$ である。

命題

(1) $\mathcal{E}v(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0))(t) = \gamma(t)$.

(2) $\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t) - \dfrac{\beta(t_0)}{\ell(t_0)}\nu(t)$.

- 変曲点がないフロントに対して、フロントの特異点があっても良いことが分かります。
- t_0 として γ の特異点を取れば、$\mathcal{I}nv(\mathcal{E}v(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t)$ となります。

命題

t_0 を γ の特異点とする。

(1) t_0 が $\mathcal{E}v(\gamma)$ の正則点 $\iff$ γ は $3/2$ カスプと t_0 において微分同相である。

(2) t_0 が $\mathcal{E}v(\gamma)$ の特異点かつ $\mathcal{E}v(\mathcal{E}v(\gamma))$ の正則点

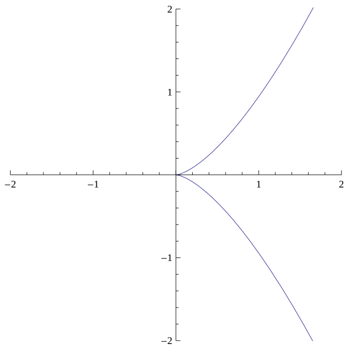
$\iff$ γ は $4/3$ カスプと t_0 において微分同相である。

- γがt_0において$3/2$カスプと微分同相

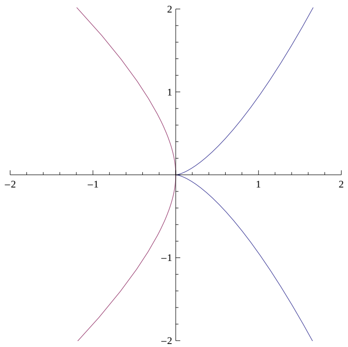
$$\iff \dot{\gamma}(t_0) = 0,\ \det\left(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)\right) \neq 0.$$

- γがt_0において$4/3$カスプと微分同相

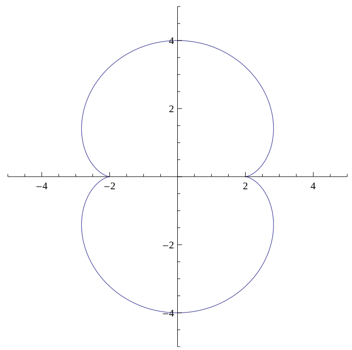
$$\iff \dot{\gamma}(t_0) = \ddot{\gamma}(t_0) = 0,\ \det\left(\gamma^{(3)}(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)\right) \neq 0.$$



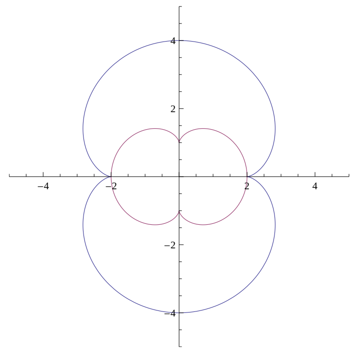
$3/2$カスプ



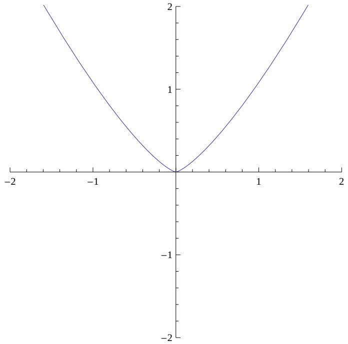
縮閉線



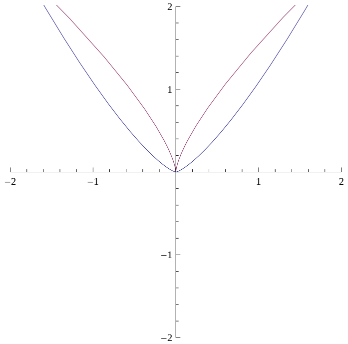
ネピロイド



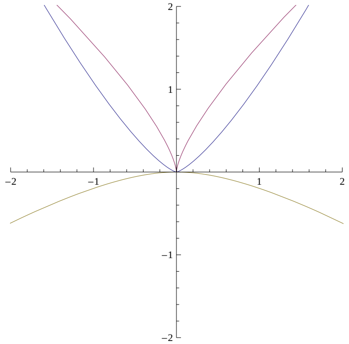
縮閉線



4/3 カスプ：$\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{4}t^4\right)$



縮閉線



縮閉線の縮閉線

命題

(1) t_0 が γ の正則点 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は 3/2 カスプと t_0 において微分同相である。

(2) t_0 が γ の特異点かつ 3/2 カスプに微分同相 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ は 4/3 カスプと t_0 において微分同相である。

定義：t_0 がフロント γ の頂点 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\beta}{\ell}\right)(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{d}{dt}\mathcal{E}v(t_0) = 0.$

（この定義は正則曲線のときの拡張になっている。）

命題（４頂点定理：縮閉線）

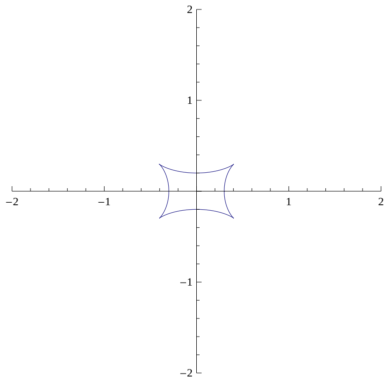
$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たない閉ルジャンドルはめ込みとする。

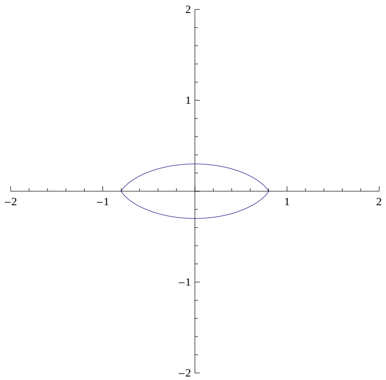
(1) γ が特異点を少なくとも４つ持つ $\Rightarrow$ γ は少なくとも４つの頂点を持つ。

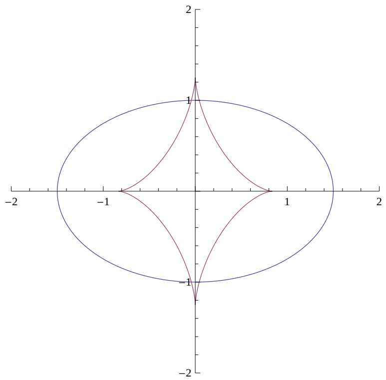
(2) γ が $3/2$ カスプより退化した特異点を少なくとも２つ持つ

$\Rightarrow$ γ は少なくとも４つの頂点を持つ。

つまり、$(d/dt)\mathcal{E}v(t) = 0$ となる点が４つある。







命題（4 頂点定理：伸開線）

$(\mathcal{I}nv(\gamma, t_0), -\mu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たない閉ルジャンドルはめ込みとする。

(1) $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ が特異点を少なくとも４つ持つ $\Rightarrow$ γ は少なくとも４つの頂点を持つ。

(2) $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ が $3/2$ カスプより退化した特異点を少なくとも２つ持つ $\Rightarrow$ γ は少なくとも４つの頂点を持つ。

- $\mathcal{E}v(\gamma)$ や $\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$ はフロントであるので、その繰り返しを考えることができる。

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$：変曲点を持たないルジャンドルはめ込みで曲率を (ℓ, β) とする（$\ell(t) \neq 0$）。

定理（２回の縮閉線と伸開線）

(1) フロントγの縮閉線の縮閉線は

$$\mathcal{E}v^2(\gamma)(t) = \mathcal{E}v(\mathcal{E}v(\gamma))(t) = \mathcal{E}v(\gamma)(t) - \frac{1}{\ell(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\ell}(t)\right)\mu(t).$$

(2) フロントγのt_0における伸開線の伸開線は

$$\begin{aligned}\mathcal{I}nv^2(\gamma, t_0)(t) &= \mathcal{I}nv((\mathcal{I}nv(\gamma), t_0), t_0)(t) \\ &= \mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t) - \left(\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t}\beta(t)dt\ \ell(t)\right)dt\right)\nu(t).\end{aligned}$$

- $\mathcal{E}v^0(\gamma) := \gamma$, $\mathcal{E}v^1(\gamma) := \mathcal{E}v(\gamma)$, $\mathcal{E}v^n(\gamma) := \mathcal{E}v(\mathcal{E}v^{n-1}(\gamma))$

- $\mathcal{I}nv^0(\gamma, t_0) := \gamma$, $\mathcal{I}nv^1(\gamma, t_0) := \mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$,
  $\mathcal{I}nv^n(\gamma, t_0) := \mathcal{I}nv(\mathcal{I}nv^{n-1}(\gamma, t_0), t_0)$

- $\beta_0(t) := \beta(t)$, $\beta_n(t) := \dfrac{\dot{\beta}_{n-1}(t)}{\ell(t)}$, $\beta_{-n}(t) := \left(\int_{t_0}^{t} \beta_{-n+1}(t)dt\right)\ell(t)$

定理 (n 回の縮閉線と伸開線)

(1) フロントγのn回の縮閉線は

$$\mathcal{E}v^n(\gamma)(t) = \mathcal{E}v^{n-1}(\gamma)(t) - \beta_{n-1}(t)J^{n-1}(\nu(t)),$$

(2) フロントγのn回の伸開線は

$$\mathcal{I}nv^n(\gamma, t_0)(t) = \mathcal{I}nv^{n-1}(\gamma, t_0) + \left(\int_{t_0}^{t} \beta_{-n+1}(t)dt\right) J^{-n}(\nu(t)).$$

ここでJ^kはJのk回作用を表す。Jは反時計回りに$\pi/2$回転する行列とする。

$$
\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{\mathcal{I}nv^2}, -\boldsymbol{\nu}) & (\boldsymbol{\mathcal{I}nv}, -\boldsymbol{\mu}) \arrow[l, "invo"'] & (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) \arrow[l, "invo"'] \arrow[r, "evo"] \arrow[d, leftrightarrow] & (\boldsymbol{\mathcal{E}v}, \boldsymbol{\mu}) \arrow[r, "evo"] & (\boldsymbol{\mathcal{E}v^2}, -\boldsymbol{\nu}) \\
 & & (\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\beta}) & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\mathcal{I}nv^2, -\nu) & \xleftarrow{invo} & (\mathcal{I}nv, -\mu) & \xleftarrow{invo} & (\gamma, \nu) & \xrightarrow{evo} & (\mathcal{E}v, \mu) & \xrightarrow{evo} & (\mathcal{E}v^2, -\nu) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
(\ell, \beta_{-2}) & \leftarrow & (\ell, \beta_{-1}) & \leftarrow & (\ell, \beta) & \rightarrow & (\ell, \beta_1) & \rightarrow & (\ell, \beta_2)
\end{array}$$

• $\ell(t) \neq 0$のとき$\ell(t) = 1$となるパラメータをパラメータ変換により取ることができる。（$\beta(t) \neq 0$のときは弧長パラメータを取ることができた。）名前募集中。

このパラメータを使えば、上の関係はまさに微分積分に対応する：

$$\cdots \leftarrow \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \beta(t) dt \right) dt \leftarrow \int_{t_0}^{t} \beta(t) dt \leftarrow \beta(t) \rightarrow \beta'(t) \rightarrow \beta''(t) \rightarrow \cdots$$

結論

変曲点を持たないフロントに対して、縮閉線と伸開線は再びフロントになり、縮閉線はルジャンドルはめ込みの曲率の微分に対応し、伸開線はルジャンドルはめ込みの曲率の積分に対応する。

- それでは変曲点がある場合はどうなるのだろうか？

$\Longrightarrow$ 正則曲線やルジャンドルはめ込みの枠組みでは、縮閉線の定義はできません。しかし、「あるクラス」に対して、縮閉線が定義できます（伸開線はいつでも定義できます）。その場合は、フロントではなくフロンタル（つまりルジャンドル曲線）となることが分かりますが、まだ、性質などあまり調べられていません。

ご清聴ありがとうございました。

藤井さん、ご還暦おめでとうございます。