2018/3/6 @ 第２５回　沼津改め　静岡研究会

BTZ ブラックホールのヘッセ構造

鈴木 達夫 [*1]

芝浦工業大学システム理工学部

（松枝宏明氏（仙台高等専門学校）との共同研究）

[*1] *E-mail address*: suzukita@shibaura-it.ac.jp

1　本講演の内容

理論物理学において，AdS/CFT 対応という枠組みが注目されている．本講演では3次元古典重力理論におけるBTZブラックホール，及びAdS_3時空のHesse構造を考察する．

- AdS/CFT 対応
- AdS_3時空
- BTZブラックホール
- Hesse構造
- 本研究[MS]
  - Codazzi Equation
  - BTZブラックホールのHesse 形式
  - BTZ ポテンシャルのLegendre変換
  - Entanglement entropy とAdS/CFT対応
- AdS_3時空の双対Hesse構造
- まとめと今後の課題

[MS] H. Matsueda and T. Suzuki, *Banados-Teitelboim-Zanelli Black Hole in the Information Geometry*, Journal of the Physical Society of Japan 86, 104001 (2017).

2 Introduction

2.1 AdS/CFT対応

AdS/CFT対応とは,

$d+2$次元の反ド・ジッター時空（AdS時空[*1]）上の重力理論は,
その境界上の$d+1$次元共形不変なゲージ理論（CFT）と等価[*2]である

という主張で，1997年にマルダセナによって発見された.

[*1] 負の曲率を持つAdS時空にブラックホール(BH)を埋め込むとBHの比熱を正にできる.

[*2] 等価とは，両者の熱力学的量や相関関数がすべて一致することを意味する.

AdS$_{d+2}$	バルク$(d+2$次元$)$	エッジ$(d+1$次元$)$
	ブラックホール ブラックホール・エントロピー $\cdots$	有限温度のCFT エンタングルメント・エントロピー $\cdots$

"ミクロな量子論の相互作用を含んだ困難な計算が，
重力の古典力学で容易に計算できる"

AdS/CFT対応は様々な検証がなされ，広範囲に及ぶ応用例を有しているが，その基礎的なメカニズムについての理解は不十分である．
本研究では，それらを直接的につなぐものとして情報幾何の枠組み（Hesse構造，ルジャンドル変換)を使う．

今回の講演は$d=1$の場合，AdS$_3$/CFT$_2$対応に対する研究である．

2.2 AdS_3時空

AdS_3は平坦な$(2+2)$次元時空$\mathbf{R}^{2+2} = \{(X^{-1}, X^1, X^2, X^3)\}$ に埋め込まれた3次元超曲面で，次式で表される.

$$-(X^{-1})^2 - (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = -l^2 \qquad (l > 0) \tag{1}$$

AdS_3は負の定曲率 $-1/l^2$ をもつ.

本講演では計量を座標変換して，Poincaré座標系による表示を用いる.

$$g^{AdS} = \frac{l^2}{z^2}\left(-dt^2 + dz^2 + dx^2\right), \quad z > 0. \tag{2}$$

$z \to 0$ をAdS時空の境界とよぶ.

Remark 1. *AdS計量(2)*はスケール変換$(t, x, z) \to \lambda(t, x, z)$ で不変である.

3　BTZブラックホール

1992年，Banados, Teitelboim, Zanelli による，3次元古典重力理論におけるブラックホール解（BTZ ブラックホール）の発見：

Einstein方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \qquad \Lambda = -\frac{1}{l^2} \tag{3}$$

をみたす負の定曲率 $\Lambda = -1/l^2$ をもった時空を考える．AdS_3 はEinstein方程式(3)の解である.

BTZ ブラックホールとは，Einstein方程式(3)の解で，次の式で記述される擬Riemann計量である.

BTZ ブラックホール

$$ds^2 = -(N^{\perp})^2 dt^2 + \frac{1}{(N^{\perp})^2} dr^2 + r^2 (N^{\phi} dt + d\phi)^2 \tag{4}$$

ここで，M および J を定数として，

$$(N^{\perp})^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N^{\phi} = -\frac{J}{2r^2} \tag{5}$$

以後，$l=1$，角運動量 $J=0$ とし，ブラックホールにおける事象の地平線（イベント・ホライズン）の近傍を調べるのに適した座標変換を行い，次の形の計量を考える：

$$g^{BTZ}=\frac{1}{z^2}\left(-f(z)dt^2+\frac{dz^2}{f(z)}+dx^2\right) \tag{6}$$

ここで $f(z)=1-\frac{z^2}{z_0^2}$，$z=z_0$ がイベント・ホライズンである．

以後，$a=\frac{1}{z_0^2}$ とおく．$z_0\to\infty$ $(a\to 0)$ の極限[*3]では，(6) は次のようになる．

$$g^{AdS}=\frac{1}{z^2}\left(-dt^2+dz^2+dx^2\right) \tag{7}$$

AdS/CFT 対応を情報幾何の枠組みでとらえるため，この計量 g^{BTZ} の Hesse potential を求めたい．

[*3] ブラックホールが消失して，背景の AdS 時空に戻ることに対応

4　Hesse構造 [志磨]

Definition 1. 多様体 M 上の平坦接続 D と擬Riemann計量 g の組 (D, g) が**Hesse 構造**
$\Leftrightarrow$ g が D のアファイン座標 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関して，ある関数 ψ のHesse形式

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \tag{8}$$

と表されること．すなわち，$g = Dd\psi$.
このとき g を D に関するHesse計量，ψ を g の D に関するpotentialという．Hesse構造 (D, g) が与えられた多様体をHesse多様体といい，(M, D, g) で表す.

Proposition 2. (M, D) を平坦多様体，g を M 上の *Riemann*計量とするとき，次の二つは同値である.
(1) g は *Hesse*計量
(2) *Codazzi equation* $\partial_k g_{ij} = \partial_i g_{kj}$ が成り立つ．$(\partial_i = \partial/\partial x^i)$

5　本研究

5.1　Codazzi equation

与えられた計量 g^{BTZ} のHesse potential ψ を求めるために,
Codazzi equation $\partial_k g_{ij} = \partial_i g_{kj}$ を解く.

Gauss分布の正準パラメータを参考に, g^{BTZ} において

$$t = t(\theta^0, \theta^2), \quad x = \frac{\theta^1}{\theta^2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\theta^2}} \tag{9}$$

と仮定すると $\frac{f(z)}{z^2} = \theta^2 - a$ であり, $t_i := \frac{\partial t}{\partial \theta^i}$ とおいて,

$$g^{BTZ} = \frac{1}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + dx^2\right) \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

$$= -(\theta^2 - a)(t_0 d\theta^0 + t_2 d\theta^2)^2$$

$$+\frac{1}{(\theta^2)^2}\left\{\theta^2(d\theta^1)^2 - 2\theta^1 d\theta^1 d\theta^2 + \left(\frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} + \frac{\theta^2}{4(\theta^2 - a)}\right)(d\theta^2)^2\right\} \tag{12}$$

よって，

$$g_{00} = -(\theta^2 - a)(t_0)^2, \quad g_{01} = g_{10} = 0, \quad g_{02} = g_{20} = -(\theta^2 - a)t_0 t_2, \tag{13}$$

$$g_{11} = \frac{1}{\theta^2}, \quad g_{12} = g_{21} = -\frac{\theta^1}{(\theta^2)^2}, \tag{14}$$

$$g_{22} = \frac{1}{(\theta^2)^2}\left(\frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} + \frac{\theta^2}{4(\theta^2 - a)}\right) - (\theta^2 - a)(t_2)^2 \tag{15}$$

このとき，9本のCodazzi equation $\partial_k g_{ij} = \partial_i g_{kj}\ (i, j, k = 0, 1, 2)$ のうち7本は自動的に成り立つことがわかり，非自明な残りの2本を解く．

$t_{ij} := \frac{\partial^2 t}{\partial\theta^i \partial\theta^j}$ とおいて，

$$\partial_0 g_{20} = \partial_2 g_{00} \quad \Leftrightarrow \quad (\theta^2 - a)t_2 t_{00} - (\theta^2 - a)t_0 t_{02} - (t_0)^2 = 0 \tag{16}$$

$$\partial_0 g_{22} = \partial_2 g_{02} \quad \Leftrightarrow \quad (\theta^2 - a)t_0 t_{22} - (\theta^2 - a)t_2 t_{02} + t_0 t_2 = 0 \tag{17}$$

さらに変数分離　$t = h(\theta^0)k(\theta^2)$　とおいて解くと，

$$t = \left(\frac{\theta^0}{\theta^2 - a}\right)^p \quad (p\text{はゼロでない定数}) \tag{18}$$

が得られる．

5.2　BTZ ブラックホールの Hesse 形式

ここでは前節の計算結果で $p = 1$ とし，変数変換

$$t = \frac{\theta^0}{\theta^2 - a}, \quad x = \frac{\theta^1}{\theta^2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\theta^2}}, \tag{19}$$

を考える．領域 Ω を

$$\Omega = \{(\theta^0, \theta^1, \theta^2) \mid \theta^0, \theta^1 \in \mathbf{R},\ 0 < a < \theta^2\} \tag{20}$$

とする.

Theorem 3. *3次元時空における擬 Riemann 計量*

$$g^{BTZ} = \frac{1}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + dx^2\right), \quad f(z) = 1 - \frac{z^2}{z_0^2} = 1 - az^2 \tag{21}$$

の *Hesse*構造は，Ω 上の平坦接続 D のアファイン座標 $(\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ に関して *Hesse* ポテンシャル

$$\psi = -\frac{(\theta^0)^2}{2(\theta^2 - a)} + \frac{(\theta^1)^2}{2\theta^2} + \frac{1}{4a}\left\{(\theta^2 - a)\log(\theta^2 - a) - \theta^2 \log\theta^2\right\} \tag{22}$$

によって与えられ，g^{BTZ} は次のように表される.

$$\begin{aligned} g^{BTZ} = &-\frac{1}{\theta^2 - a}(d\theta^0)^2 + \frac{2\theta^0}{(\theta^2 - a)^2}d\theta^0 d\theta^2 \\ &+\frac{1}{(\theta^2)^2}\left\{\theta^2(d\theta^1)^2 - 2\theta^1 d\theta^1 d\theta^2 + \left(\frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} + \frac{\theta^2}{4(\theta^2 - a)} - \frac{(\theta^0)^2(\theta^2)^2}{(\theta^2 - a)^3}\right)(d\theta^2)^2\right\} \end{aligned} \tag{23}$$

5.3 BTZ ポテンシャルの Legendre 変換

再び，BTZ ブラックホールのHesse ポテンシャル

$$\psi = -\frac{(\theta^0)^2}{2(\theta^2 - a)} + \frac{(\theta^1)^2}{2\theta^2} + \frac{1}{4a}\left\{(\theta^2 - a)\log(\theta^2 - a) - \theta^2 \log\theta^2\right\}$$

を考察する.

双対変数を $\eta_i = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta^i} \quad (i = 0, 1, 2)$ と定義すると，

$$\eta_0 = \frac{\theta^0}{\theta^2 - a}, \quad \eta_1 = -\frac{\theta^1}{\theta^2}, \tag{24}$$

$$\eta_2 = -\frac{(\theta^0)^2}{2(\theta^2 - a)^2} + \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^2} - \frac{1}{4a}\left\{\log(\theta^2 - a) - \log\theta^2\right\}. \tag{25}$$

このとき，双対ポテンシャルは次のようになる．

$$\varphi(\eta) = \sum_{i=0}^{2} \theta^i \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i} - \psi \tag{26}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\log(1-e^V) - \log a - V\right\} + \frac{1}{2}a(\eta_0)^2 \tag{27}$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{e^V}{F} + \frac{1}{2}a(\eta_0)^2, \tag{28}$$

ここで，$$V(\eta) := -4a\left(\eta_2 + \frac{1}{2}(\eta_0)^2 - \frac{1}{2}(\eta_1)^2\right), \quad F(\eta) := \frac{1-e^{V(\eta)}}{a} \tag{29}$$

θ^i は η_i を用いて表すと次のようになることを注意しておく．

$$\theta^0 = \frac{\eta_0 e^V}{F}, \quad \theta^1 = -\frac{\eta_1}{F}, \quad \theta^2 = \frac{1}{F}. \tag{30}$$

5.4 Entanglement entropy と AdS/CFT 対応

この準備の元，BTZ ブラックホールの Hesse potential が，同時に CFT の entanglement entropy も与えることがわかる．

entanglement entropy は，ある系 A とその補集合 $\bar{A}$ に対し，量子状態の Schmidt 分解

$$\sum_n \sqrt{\lambda_n}\, |n\rangle_A \otimes |n\rangle_{\bar{A}}, \quad \sum_n \lambda_n = 1 \tag{31}$$

に対し，entanglement スペクトル γ_n を

$$\lambda_n = e^{-\gamma_n} \tag{32}$$

で定義し，その平均

$$S = \langle \gamma \rangle = \sum_n \lambda_n \gamma_n \tag{33}$$

で定義される．
確率分布 $\{\lambda_n\}$ を指数型分布族

$$\lambda_n = e^{\theta^\alpha F_{n,\alpha} - \psi} \tag{34}$$

とすると，次が得られる．

$$S(\theta) = \psi(\theta) - \theta^\alpha \partial_\alpha \psi(\theta) \tag{35}$$

今回の場合，

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \psi(\theta) - \theta^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi(\theta) && (36)\\
&= -\varphi(\eta(\theta))) && (37)\\
&= -\frac{1}{4}\log(\theta^2 - a) - \frac{1}{2}a\left(\frac{\theta^0}{\theta^2 - a}\right)^2 && (38)\\
&= \frac{1}{4}\log\frac{z^2}{1 - az^2} - \frac{1}{2}at^2 && (39)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
z = z_0 \tanh\left(\frac{l}{z_0}\right) \tag{40}
$$

とおくと，$a = 1/(z_0)^2$ であったので，

$$
S = \frac{1}{2}\log\left(z_0 \sinh\left(\frac{l}{z_0}\right)\right) - \frac{1}{2}at^2 \tag{41}
$$

となり，（時間項付きの）有限温度$(1+1)$次元CFTのentanglement entropy を得ることができる．

6　AdS時空の双対Hesse構造

6.1　双対Hesse構造とHesse断面曲率一定

Definition 4. (M, D, g) をHesse多様体，g のLevi-Civita 接続を ∇ とし，
$D' = 2\nabla - D$ を D の双対平坦接続，(D', g) を (D, g) の双対**Hesse**構造という．

Definition 5. 差テンソル $\gamma = \nabla - D$ の D による共変微分によって定義される $(1, 3)$ 型テンソル $H = D\gamma$ を**Hesse**曲率テンソルという．また，Hesse断面曲率が定数 c

$$\Leftrightarrow \quad H_{ijkl} = \frac{c}{2}(g_{ij}g_{kl} + g_{il}g_{kj}). \tag{42}$$

6.2 AdS時空の双対Hesse構造

Hesseポテンシャル(22)は，$a \to 0$のとき次のようになり，AdS_3のHesse ポテンシャルを与える：

$$\psi = -\frac{(\theta^0)^2}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{2\theta^2} - \frac{1}{4}\log\theta^2 + \frac{1}{4} \tag{43}$$

このポテンシャルを考察する.

$$k = 4,\ \omega = \theta^2 > 0,$$

$$\rho : \mathbf{R}^+ \to \mathsf{Sym}(2, \mathbf{R}), \quad \rho(\omega) = \rho(\theta^2) = \theta^2 I_2 \quad (I_2\text{は}2\text{次単位行列}), \tag{44}$$

$${}^t\theta = (\sqrt{-1}\theta^0, \theta^1) \tag{45}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{(\theta^0)^2}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{2\theta^2} - \frac{1}{4}\log\theta^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left\{{}^t\theta\rho(\omega)^{-1}\theta - \frac{1}{k}\log\det\rho(\omega)\right\} + \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{46}$$

[志磨]p.120 の問題と同様にして，次の命題が示せる.

Proposition 6.

$$\rho : \mathbf{R}^{+} \to \mathit{Sym}(n, \mathbf{R}), \quad \rho(\omega) = \omega I_n \quad (I_n \text{は} n \text{次単位行列}),$$

$$\psi = \frac{1}{2}\left\{ {}^{t}\theta\rho(\omega)^{-1}\theta - \frac{1}{k}\log\det\rho(\omega) \right\} \tag{47}$$

とするとき，$(D, g = Dd\psi)$ の双対 *Hesse* 構造は *Hesse* 断面曲率が定数 $c = \dfrac{2k}{n}$ である.

今回は $c = \frac{2\cdot 4}{2} = 4$ の場合に相当する．これにより，次を得る.

Corollary 7. *AdS_3 の Hesse ポテンシャル (43) から定まる Hesse* 構造 (D, g) の双対構造 (D', g) は，*Hesse* 断面曲率が定数 $c = 4$ である.

7　まとめと今後の課題

- 今回求めた Hesse potential は，AdSのブラックホール計量とCFTのentanglement entropy の両方を与えるので，AdS/CFTの研究において情報幾何の手法は有効である.
- 情報幾何を利用した，他の重力理論の計量に対するAdS/CFTの研究
- ローレンツ計量のHesse potential と複素正規分布の関係
- 擬リーマン計量の情報幾何

　・Fisher計量は正定値

References

[志磨] 志磨裕彦, ヘッセ幾何学, 裳華房，2001.

[A-N] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of information geometry*, volume 191 of Translations of Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Originally in Japanese (Iwanami Shoten, Tokyo, 1993).

[松枝] H.Matsueda, *Embedding Quantum Information into Classical Spacetime: Information-Geometrical Perspectives on AdS/CFT Correspondence*, arXiv:1208.5103.

[BTZ] M.Banados, C.Teitelboim, J.Zanelli, *Black hole in three-dimensional spacetime*, Phys. Rev. Lett. 69, 1849 (1992).

[MS] H. Matsueda and T. Suzuki, *Banados-Teitelboim-Zanelli Black Hole in the Information Geometry*, Journal of the Physical Society of Japan 86, 104001 (2017).