2013年3月7日　第20回沼津研究会

四元数ガウス分布の双対幾何

A dual geometry of the quarternion Gaussian distribution

鈴木 達夫　Tatsuo Suzuki[*1]

Shibaura Institute of Technology

吉澤 真太郎　Shintaro Yoshizawa[*2]

Gotemba Theoretical Science Research

[*1] *E-mail address*: suzukita@sic.shibaura-it.ac.jp

[*2] *E-mail address*: yzw2003@mail.goo.ne.jp

1　四元数ガウス分布の双対幾何

Plan of this talk:

1. **背景と目標/狙い**
2. Introduction **：実ガウス分布と情報幾何**
3. **四元数ガウス分布の定義**
4. **主空間と主ポテンシャル関数（四元数形式，複素形式及び実形式）**
5. **双対空間と双対ポテンシャル関数（四元数形式，複素形式及び実形式）**
6. Kullback-Leibler **情報量（四元数形式）**

1.1　背景と目指したい目標/狙い

〈背景〉

実ベクトル変数ガウス分布の幾何は，上半平面ポアンカレモデルの自然な一般化．
先行研究やその応用（コンピュータビジョン，機械学習）でも応用されている．
近年，クリフォード代数が「計算知能」と呼ばれる分野で活用されている．
実ベクトル変数ガウス分布の双対幾何の応用的広がりを踏まえ，
数学的・数理的観点から四元数ガウス分布の双対幾何に着手．

〈目標/狙い〉

- ♦**行列リッカチ代数方程式と四元数ガウス分布の双対構造との関係**
- ♦**複素ガウス分布とグラスマン多様体のケーラーポテンシャルとの関係**
- ♦**有界領域の幾何と四元数ガウス分布の双対幾何との関係**
- ♦**実解析的特異点論のルジャンドル特異点との違い/関連は何か**
- ♦**準行列式**(quasi-determinant)**，一般逆行列の視点に基づく，**
  ツイスター幾何と四元数ガウス分布の双対幾何の関係
- ♦**四元数ガウス分布を題材に四元数情報幾何（四元数アファイン微分幾何）の構成**
- ♦**四元数ガウス分布の実解析的変形による量子情報への理論展開**

2 実ガウス分布と情報幾何

2.1 指数型分布族

統計的モデル $S = \{p_\theta |\ \theta \in \Xi\}$ (集合 χ 上の確率分布の族) が指数型分布族とは，χ 上の関数 $\{C, F_1, \cdots, F_n\}$ および Ξ 上の関数 ψ を用いて次のように書けるもの；

$$p(x;\theta) = \exp\left\{C(x) + \theta^i F_i(x) - \psi(\theta)\right\}. \tag{1}$$

指数型分布族はガウス分布(正規分布)，Poisson 分布，多項分布などを含むかなり広い分布族である．

2.2 1変数ガウス分布族

統計的モデル $S = \{p_\xi = p(x;\xi) | \ \xi = (\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+\}$ **(後述の**Fisher**計量を考えて****ポアンカレ上半平面****)として，(実)**1**変数ガウス分布の確率密度関数**(pdf)**を考える**.

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{2}$$

$$= \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log(\sqrt{2\pi}\sigma)\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\theta^1 x_1 + \theta^2 x_2 - \psi(\theta)\right\} \qquad \textbf{(指数型分布族)} \tag{3}$$

新しい座標系(正準パラメータ)：$\theta = (\theta^1, \theta^2), \quad \theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}, \ \theta^2 = \frac{1}{2\sigma^2} > 0$ **(正定値)**

新しい確率変数：$x = (x_1, x_2) = (x, -x^2)$

主ポテンシャル関数

$$\psi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log(\sqrt{2\pi}\sigma) = \frac{(\theta^1)^2}{4\theta^2} - \frac{1}{2}\log(\theta^2) + \frac{1}{2}\log\pi \tag{4}$$

主ポテンシャル関数は変数(μ, σ)**の下では凸でも凹でもないが，正準パラメータ** θ **のもとでは凸関数となることが重要である.**

双対パラメータ：$\eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \eta_1 = E[x_1] = \mu,\ \eta_2 = E[x_2] = -(\mu^2 + \sigma^2) < 0$
このとき，次が成り立つ．

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta^i} = \eta_i \quad (i = 1, 2). \tag{5}$$

さらに，双対ポテンシャル関数

$$\varphi(\eta) = \theta^1 \eta_1 + \theta^2 \eta_2 - \psi = -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right) - \frac{1}{2} \log(-\eta_2) - \frac{1}{2} \log 2\pi e \tag{6}$$

を考えると，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i} = \theta^i \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

が成り立つ．さらに，Fisher情報行列

$$g_{ij}(\theta) = E\left[\frac{\partial l_\theta}{\partial \theta^i} \frac{\partial l_\theta}{\partial \theta^j}\right], \quad l_\theta(x) = \log p(x; \theta) \tag{8}$$

($g = g_{ij} d\theta^i d\theta^j$ **は Fisher計量)に対し，次が成り立つ．**

$$g_{ij}(\theta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j}, \quad g^{ij}(\eta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_i \partial \eta_j}, \quad (g^{ij}) \text{ は } (g_{ij}) \text{ の逆行列}. \tag{9}$$

ガウス分布のFisher計量は $g = \dfrac{1}{\sigma^2}(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$.

2.3　α-接続，双対接続

統計的モデル $S=\{p_\xi\}$ **において，各点** ξ **（分布** p_ξ **と** ξ **を同一視）に対して**

$$(\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k})_\xi = E_\xi\left[\left(\partial_i\partial_j l_\xi + \frac{1-\alpha}{2}\partial_i l_\xi \partial_j l_\xi\right)(\partial_k l_\xi)\right] \quad (\alpha\in\mathbf{R}), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\xi^i} \tag{10}$$

と定義し，

$$<\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j,\ \partial_k> = \Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} \quad (g=<\ ,\ > \text{ は Fisher 計量}) \tag{11}$$

によって決まる S **上のアファイン接続** $\nabla^{(\alpha)}$ **を** α-**接続という．**

一般に，多様体Sのアファイン接続∇に対し，座標系$[\xi^i]$で$\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0 \quad (\forall i, j)$を満たすものを$\nabla$のアファイン座標系と呼び，アファイン座標系が存在するとき∇は平坦であるという．

S上にRiemann計量$g =< \ , \ >$および二つのアファイン接続∇，∇^*が与えられているとする．S上の任意のベクトル場X, Y, Zに対し，

$$Z < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla^*_Z Y > \tag{12}$$

が成り立つとき，∇と∇^*は互いに双対的であるといい，一方を他方の双対接続，$(g, \nabla, \ \nabla^*)$をS上の双対構造と呼ぶ．∇と∇^*がともに平坦であるような$(S, g, \nabla, \ \nabla^*)$を双対平坦空間と呼ぶ．
次の定理が知られている．

Theorem 1. α-接続$\nabla^{(\alpha)}$と$(-\alpha)$-接続$\nabla^{(-\alpha)}$は*Fisher*計量に関して互いに双対的である．

これより，とくに$\nabla^{(1)}$(指数型接続，e-接続)と$\nabla^{(-1)}$(混合型接続，m-接続)とは双対的であることに注意しておく．

次の定理が知られている．

Theorem 2. 双対平坦空間 $(S, g, \nabla,\ \nabla^*)$ において，∇-アファイン座標系を任意にとると，g に関して $[\theta^i]$ と双対的な座標系 $[\eta_i]$ が存在して，$[\eta_i]$ は ∇^*-アファイン座標系となる．これらの座標系の関係は，ポテンシャル ψ, φ を用いた *Legendre* 変換 *(5), (6), (7)* によって表される．また，これらの座標系に関する計量 g の成分は，ポテンシャルの２階微分 *(9)* で表される．

先の例のガウス分布族 (一般に指数型分布族) の空間 $(S, g, \nabla^{(1)},\ \nabla^{(-1)})$ は双対平坦であり，正準パラメータ $[\theta]$ がその $\nabla^{(1)}$-アファイン座標系，双対パラメータ $[\eta]$ がその $\nabla^{(-1)}$-アファイン座標系を与える．

2.4 Kullback-Leibler 情報量

点$p \in S$**における正準・双対パラメータを**$\theta^{(p)}, \eta^{(p)}$ **と表すことにする．**
2**点** $p, q \in S$**に対して，**

$$D(p||q) := \psi(\theta^{(p)}) + \varphi(\eta^{(q)}) - (\theta^{(p)})^i (\eta^{(q)})_i \tag{13}$$

をKullback-Leibler(KL) 情報量 (Kullback-Leibler divergence)という．
KL **情報量は次の性質を持つ：**

$$D(p||q) \geq 0, \quad \text{for } p, q \in S, \tag{14}$$

$$D(p||q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = q. \tag{15}$$

距離の公理（対称性，三角不等式）は一般には満たさない．
次のピタゴラス定理が重要である．

Theorem 3. 双対平坦空間$(S, g, \nabla, \ \nabla^*)$**において，**$p$**と**$q$**を結ぶ**$\nabla$**-測地線を**$\gamma_1$**，**$q$**と**$r$**を結ぶ**$\nabla^*$**-測地線を**$\gamma_2$**とする．**$\gamma_1$**と**$\gamma_2$**が交点**$q$**において**$($$g$**の内積に関して**$)$**直交するならば次が成り立つ．**

$$D(p||r) = D(p||q) + D(q||r). \tag{16}$$

統計的モデル S の 2 点 p, q に対しては次が成り立つ．

$$D(p||q) = E(\log p) - E(\log q) = \int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{17}$$

例：実 $4N$ 変数ガウス分布の確率密度関数

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{4N}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} \tag{18}$$

$p = p(x; \mu, \Sigma)$ **と** $q = p(x; \hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ **の** KL **情報量は**

$$E[x] = \mu, \qquad E\left[(x-\mu)(x-\mu)^T\right] = \Sigma$$

を用いて，

$$\begin{aligned} D(p||q) &= E(\log p) - E(\log q) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log \left(\frac{\det \hat{\Sigma}}{\det \Sigma} \right) + \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}^{-1} (\Sigma + (\mu - \hat{\mu})(\mu - \hat{\mu})^T)) - 4N \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

3　四元数ガウス分布の正規化定数

N **成分四元数ベクトル** $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = z_1 + z_2 j \in \mathbf{H}^N, \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C}^N$
正値四元数エルミート行列 $\quad H = A + Bj \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+, \quad \bar{A}^T = A,\ B^T = -B$
$(x,\ Hx) := \bar{x}^T Hx$ **とする．このとき，次が成り立つ．**

Proposition 4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Hx)} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\pi^{2N}}{|A||\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B|} \tag{20}$$

Remark 1. $A \in$ *Herm*$(N, \mathbf{C})_+$, $S \in$ *Symm*$(N, \mathbf{R})_+$*(***正値実対称行列***)* **に対し，次が成り立つ** *[3].*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z,\ Az)} dxdy = \frac{\pi^N}{|A|}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Sx)} dx = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{|S|^{\frac{1}{2}}}. \tag{21}$$

証明：

$$\begin{aligned}(x,\ Hx) &= \bar{x}^T Hx \\ &= \mathrm{Re}(\bar{x}^T Hx) \qquad\qquad [H\ \text{はエルミート行列よりこの２次形式は実数値}] \\ &= (z_1,\ Az_1 - B\bar{z}_2) + (\bar{z}_2,\ \bar{A}\bar{z}_2 + \bar{B}z_1) \\ &= (z_1 - A^{-1}B\bar{z}_2,\ A(z_1 - A^{-1}B\bar{z}_2)) + (\bar{z}_2,\ (\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B)\bar{z}_2)\end{aligned}$$

あとは複素数の場合の公式より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Hx)} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\pi^N}{|A|} \frac{\pi^N}{|\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B|}.$$

問：右辺の分母は何であろうか？

4 四元数行列とその複素表現・実表現とそれらの行列式の関係

四元数 N 次正方行列の全体を $\mathbf{H}^{N\times N}$ とする．($\mathbf{C}^{N\times N}$, $\mathbf{R}^{N\times N}$ **も同様．**)
$H = A + Bj \ \in \mathbf{H}^{N\times N}, \quad A, B \in \mathbf{C}^{N\times N}$ **に対し，**

$$\mathrm{Sdet}H = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} : \ \text{Study 行列式（成分の } 2N \text{ 次多項式)} \tag{22}$$

N **次正値四元数エルミート行列の全体を** $\mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ **とする．**
$H = A + Bj \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ **のとき** $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ **は正の実数なので，**

$$|H| = \det H := (\mathrm{Sdet}H)^{\frac{1}{2}}, \qquad H \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+ \tag{23}$$

と定義する．このとき，

$$|H|^2 = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = |A||\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B| \tag{24}$$

に注意する．

さらに，実表現との関係についても触れておく．

Lemma 5. 正値四元数エルミート行列 $H = A + Bj = A_1 + A_2 i + B_1 j + B_2 k$ に対して，

$$\mathit{SdetH} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \left\{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1 & A_1 & -B_2 & A_2 \\ A_2 & B_2 & A_1 & B_1 \\ B_2 & -A_2 & -B_1 & A_1 \end{pmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Remark 2.

$$\begin{aligned} H\,\text{が四元数エルミート} &\Leftrightarrow A\text{：エルミート，}B\text{：交代} \\ &\Leftrightarrow A_1\text{：対称，}A_2, B_1, B_2\text{：交代} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1 & A_1 & -B_2 & A_2 \\ A_2 & B_2 & A_1 & B_1 \\ B_2 & -A_2 & -B_1 & A_1 \end{pmatrix}\text{：対称} \end{aligned}$$

これらをまとめると次のようになる．

$H \in \mathsf{Herm}(N, \mathbf{H})_+$，$A \in \mathsf{Herm}(N, \mathbf{C})_+$，$S \in \mathsf{Symm}(N, \mathbf{R})_+$ **に対し，**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Hx)} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\pi^{2N}}{|H|^2} \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z,\ Az)} dx dy = \frac{\pi^N}{|A|}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Sx)} dx = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{|S|^{\frac{1}{2}}}. \tag{27}$$

すなわち，$K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \quad d = \dim_{\mathbf{R}} K = 1, 2, 4$ **とすると，**$A \in \mathsf{Herm}(N, K)_+$ **に対し，**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,\ Ax)} dx = \frac{\pi^{\frac{dN}{2}}}{|A|^{\frac{d}{2}}}. \tag{28}$$

5　四元数ガウス分布

$(\mu, \Sigma) \in \mathbf{H}^N \times \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ に対し，四元数ガウス分布の確率密度関数を次のように定義する：

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\pi^{2N} (\det \Sigma)^2} \exp\{-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\} \tag{29}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (x - \mu) - \log(\pi^{2N} (\det \Sigma)^2)\} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &= \exp\{-\frac{1}{2} \bar{x}^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2} \bar{x}^T \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2} \bar{\mu}^T \Sigma^{-1} x \\ &\qquad -(\frac{1}{2} \bar{\mu}^T \Sigma^{-1} \mu + \log((\det \Sigma)^2) + 2N \log \pi)\} \end{aligned} \tag{31}$$

Yoshizawa-Tanabe [5] に従い，次の正準パラメータを定義する：

$$\theta_{\mathbf{H}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^{-1} \mu, \quad \Theta_{\mathbf{H}} := \Sigma^{-1} \tag{32}$$

このとき，

$$\frac{1}{2} \bar{\mu}^T \Sigma^{-1} \mu + \log((\det \Sigma)^2) = \bar{\theta}_{\mathbf{H}}^T \Theta_{\mathbf{H}}^{-1} \theta_{\mathbf{H}} - \log((\det \Theta_{\mathbf{H}})^2) \tag{33}$$

となることに注意する．

6　二次形式の四元数，複素数及び実数表示の関係

$K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ とし，K-値正定値エルミート行列 Θ_K を次のようにおく．

$$\Theta_{\mathbf{H}}^{-1} = P + Qj \quad \in \mathbf{H}^{N\times N}, \tag{34}$$

$$\Theta_{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ -\bar{Q} & \bar{P} \end{pmatrix} \quad \in \mathbf{C}^{2N\times 2N}, \quad P = P_0 + P_1 i,\ Q = Q_0 + Q_1 i, \tag{35}$$

$$\Theta_{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} P_0 & Q_0 & -P_1 & -Q_1 \\ -Q_0 & P_0 & -Q_1 & P_1 \\ P_1 & Q_1 & P_0 & Q_0 \\ Q_1 & -P_1 & -Q_0 & P_0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbf{R}^{4N\times 4N}. \tag{36}$$

まず，四元数ベクトル $\theta_{\mathbf{H}} = a + bj \quad (a, b \in \mathbf{C}^N)$ に対し，

$$\theta_{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta_{\mathbf{H}} - i\theta_{\mathbf{H}} i \\ j\theta_{\mathbf{H}} - k\theta_{\mathbf{H}} i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\bar{b} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2N}, \quad \theta_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\theta_{\mathbf{C}}) \\ \mathrm{Im}(\theta_{\mathbf{C}}) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{4N} \tag{37}$$

及び

$$V := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_N & iE_N \\ jE_N & kE_N \end{pmatrix} \in Sp(2N), \quad U := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_{2N} & -iE_{2N} \\ -iE_{2N} & E_{2N} \end{pmatrix} \in U(4N) \tag{38}$$

とおく．このとき(34), (35)から

$$\bar{V}^T \Theta_{\mathbf{C}}^{-1} V = \begin{pmatrix} \Theta_{\mathbf{H}}^{-1} & O \\ O & \Theta_{\mathbf{H}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{V}^T \theta_{\mathbf{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_{\mathbf{H}} \\ -\theta_{\mathbf{H}} i \end{pmatrix} \tag{39}$$

となるので $\bar{\theta}_{\mathbf{H}}^T \Theta_{\mathbf{H}}^{-1} \theta_{\mathbf{H}} = \bar{\theta}_{\mathbf{C}}^T \Theta_{\mathbf{C}}^{-1} \theta_{\mathbf{C}}$ が成り立つ．

また(35), (36)から

$$\bar{U}^T \Theta_{\mathbf{R}}^{-1} U = \begin{pmatrix} \Theta_{\mathbf{C}}^{-1} & O \\ O & \bar{\Theta}_{\mathbf{C}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{U}^T \theta_{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_{\mathbf{C}} \\ i\bar{\theta}_{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \tag{40}$$

となるので $\bar{\theta}_{\mathbf{C}}^T \Theta_{\mathbf{C}}^{-1} \theta_{\mathbf{C}} = \bar{\theta}_{\mathbf{R}}^T \Theta_{\mathbf{R}}^{-1} \theta_{\mathbf{R}}$ が成り立つ．

7　四元数ガウス分布のポテンシャル関数と双対パラメータ

$K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \quad d = \dim_{\mathbf{R}} K = 1, 2, 4$とする．主ポテンシャル関数を

$$\varphi_K(\theta_K, \Theta_K) := \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} \theta_K - \log((\det \Theta_K)^{d/2}) + \frac{d}{2} N \log \pi \tag{41}$$

とする．このとき，

$$\dot{\varphi}_K = 2\mathsf{Re}(\bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} \dot{\theta}_K) + \mathsf{Retr}[-(\Theta_K^{-1} \theta_K \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} + \frac{d}{2} \Theta_K^{-1}) \dot{\theta}_K] \tag{42}$$

これより，次のように定義する；

$$\eta_K^T := \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1}, \quad H_K^T := -(\Theta_K^{-1} \theta_K \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} + \frac{d}{2} \Theta_K^{-1}) \tag{43}$$

このとき，定義(43)**における**$K=\mathbf{R}$**と**$K=\mathbf{C}$**の関係は，**

$$\eta_{\mathbf{R}}^T U = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_{\mathbf{C}}^T,\ -i\bar{\eta}_{\mathbf{C}}^T], \tag{44}$$

$$\bar{U}^T H_{\mathbf{R}}^T U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_{\mathbf{C}}^T & i\bar{\eta}_{\mathbf{C}}\bar{\eta}_{\mathbf{C}}^T \\ -i\eta_{\mathbf{C}}\eta_{\mathbf{C}}^T & \bar{H}_{\mathbf{C}}^T \end{pmatrix} \tag{45}$$

が成り立つことがわかる．したがって次を得る．

$$\eta_{\mathbf{R}}^T = [\mathsf{Re}(\eta_{\mathbf{C}}^T),\ -\mathsf{Im}(\eta_{\mathbf{C}}^T)], \tag{46}$$

$$H_{\mathbf{R}}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathsf{Re}(H_{\mathbf{C}}^T - \eta_{\mathbf{C}}\eta_{\mathbf{C}}^T) & -\mathsf{Im}(H_{\mathbf{C}}^T - \eta_{\mathbf{C}}\eta_{\mathbf{C}}^T) \\ \mathsf{Im}(H_{\mathbf{C}}^T + \eta_{\mathbf{C}}\eta_{\mathbf{C}}^T) & \mathsf{Re}(H_{\mathbf{C}}^T + \eta_{\mathbf{C}}\eta_{\mathbf{C}}^T) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

8　双対ポテンシャル関数

非退化二次形式を

$$< (\theta_K, \Theta_K),\ (\eta_K, H_K) >:= 2\mathsf{Re}(\bar{\eta}_K^T \theta_K) + \mathsf{Retr}(H_K \Theta_K) \tag{48}$$

と定義し，双対ポテンシャルを次のように定義する：

$$\varphi_K^*(\eta_K, H_K) := < (\theta_K, \Theta_K),\ (\eta_K, H_K) > -\varphi_K \tag{49}$$

$$= -\frac{d}{2}\log(\det(I + H_K^{-1}\eta_K \bar{\eta}_K^T)) - \frac{d}{2}\log(\det(-\frac{2}{d}H_K)) - \frac{dN}{2}\log \pi e \tag{50}$$

9 四元数ガウス分布によるKL情報量

体がKのときのKL情報量を次のように定義する.

$$D(p||q)_K := \varphi_K(\theta_K^{(p)}, \Theta_K^{(p)}) + \varphi_K^*(\eta_K^{(q)}, H_K^{(q)}) - < (\theta_K^{(p)}, \Theta_K^{(p)}),\ (\eta_K^{(q)}, H_K^{(q)}) > \quad (51)$$

ここで$K = \mathbf{H}$のとき，$p = (\hat{\mu}, \hat{\Sigma}),\ q = (\mu, \Sigma) \in \mathbf{H}^N \times \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ **とすると，**

$$\theta_{\mathbf{H}}^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}, \quad \Theta_{\mathbf{H}}^{(p)} = \hat{\Sigma}^{-1}, \quad (52)$$

$$\eta_{\mathbf{H}}^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu, \quad H_{\mathbf{H}}^{(q)} = -\left(\frac{1}{2}\mu\bar{\mu}^T + \frac{d}{2}\Sigma\right) \quad (53)$$

となるので，次の定理を得る.

Theorem 6. $d = 4$**として，**

$$D(p||q)_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\left\{d \cdot \log\left(\frac{\det\hat{\Sigma}}{\det\Sigma}\right) + \mathit{Retr}(\hat{\Sigma}^{-1}(d \cdot \Sigma + (\mu - \hat{\mu})(\bar{\mu} - \bar{\hat{\mu}})^T)) - dN\right\}. \quad (54)$$

10 Disscussion

今後の目標をもう一度書いておく.

♦行列リッカチ代数方程式と四元数ガウス分布の双対構造との関係
♦複素ガウス分布とグラスマン多様体のケーラーポテンシャルとの関係
♦有界領域の幾何と四元数ガウス分布の双対幾何との関係
♦実解析的特異点論のルジャンドル特異点との違い/**関連は何か**
♦準行列式(quasi-determinant)**，一般逆行列の視点に基づく，**
ツイスター幾何と四元数ガウス分布の双対幾何の関係
♦四元数ガウス分布を題材に四元数情報幾何（四元数アファイン微分幾何）の構成
♦四元数ガウス分布の実解析的変形による量子情報への理論展開

Appendix

10.1 Mooreの四元数行列式

n次対称群S_nの元をdisjoint cycleの積に分解しておく．

$$\sigma = (k_{11} \cdots k_{1j_1})(k_{21} \cdots k_{2j_2}) \cdots (k_{m1} \cdots k_{mj_m})$$

ただし

$$\forall i \text{ に対し，} k_{i1} < k_{ij} \quad \text{for all } j > 1$$

$$k_{11} > k_{21} > \cdots > k_{m1}$$

この表示はunique.
四元数を成分とするn次正方行列$A = (a_{ij})$に対し，Moore行列式Mdet(A)を次のように定義する；

$$\text{Mdet}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{k_{11},k_{12}} \cdots a_{k_{1j_1},k_{11}} a_{k_{21},k_{22}} \cdots\cdots a_{k_{mj_m},k_{m1}}$$

Remark 3. Aが*Hermite*四元数行列，つまり$a_{ji} = \bar{a}_{ij}$なら

$$\textit{Mdet}(A) \in \mathbf{R}.$$

Remark 4. *Moore*行列式は良い性質を持っており，広く応用されている．

Example 5. 以後，A はHermitian，つまり $a_{ii} \in \mathbf{R}, a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ とする．

$$n = 2, \qquad \mathrm{Mdet}(A) = a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2$$

$n = 3,$

$$\mathrm{Mdet}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}\bar{a}_{13} + a_{13}\bar{a}_{23}\bar{a}_{12} - |a_{12}|^2 a_{33} - |a_{13}|^2 a_{22} - |a_{23}|^2 a_{11}.$$

Remark 6. 四元数行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **に対し，**

$$|A|_{11}^{-1} = (a - bd^{-1}c)^{-1} = \left(a - b\frac{\bar{d}}{|d|^2}c\right)^{-1}$$
$$= |d|^2(|d|^2 a - b\bar{d}c)^{-1} = |d|^2 \frac{|d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b}}{||d|^2 a - b\bar{d}c|^2} \quad \text{であり，}$$

$$\begin{aligned} ||d|^2 a - b\bar{d}c|^2 \ / \ |d|^2 \ &= \ (|d|^2 a - b\bar{d}c)(|d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b}) \ / \ |d|^2 \\ &= \ |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - a\bar{c}d\bar{b} - b\bar{d}c\bar{a} \\ &=: \mathit{Sdet}(A) \end{aligned}$$

は *Study* **行列式である．他の成分も同様にして，古典的に知られた次の公式を得る．**

$$\mathit{Sdet}(A) \neq 0 \text{ のとき}, \ A^{-1} = \frac{1}{\mathit{Sdet}(A)} \begin{pmatrix} |d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} & |b|^2\bar{c} - \bar{a}b\bar{d} \\ |c|^2\bar{b} - \bar{d}c\bar{a} & |a|^2\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} \end{pmatrix}$$

$\mathit{Sdet}(A)$ **は** n **次正方行列でも定義され，次が成り立つことが知られている．** *[2]*

- **四元数行列** A **が正則** $\Leftrightarrow$ $\mathit{Sdet}(A) \neq 0$
- $\mathit{Sdet}(A) = \mathit{Mdet}(AA^*)$

10.2　Lemma 5 の証明

$$A = A_1 + iA_2,\ B = B_1 + iB_2, \quad A_j, B_j \in \mathbf{R}^{N\times N}$$

のとき，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1 & A_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \equiv X + iY$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} E & iE \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -iE \\ O & E \end{pmatrix} \quad (E\text{ は }N\text{ 次単位行列}) \\
&= \det\begin{pmatrix} X+iY & O \\ Y & X-iY \end{pmatrix} \\
&= \det(X+iY)\det(X-iY) \\
&= |\det(X+iY)|^2 = \left|\det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}\right|^2
\end{aligned}$$

参考文献

[1] **甘利俊一，長岡浩司，情報幾何の方法**, **岩波講座応用数学** 12(1993).

[2] H. Aslaksen, *Quaternionic Determinants*, The Mathematical Intelligencer 18, (1996) 57-65.

[3] R. Bellman, *Representation theorem and inequalities for hermitian matrices*, Duke. Math. J., vol26 (1959), 485-490.

[4] M. T. Loots, *The development of the quarternion normal distribution*, master's thesis at the University of Pretoria (2010).

[5] S. Yoshizawa and K. Tanabe, *Dual differential geometry associated with the Kullback-Leibler informaion on the Gaussian distributions and its 2-parameter deformations*, SUT Journal of Mathematics, vol.35, No.1 (1999), 113-137.